Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ӘОЖ 517.983, 517.518.28 Қолжазба құқығында

БЕСЖАНОВА АЙГУЛЬ ТОЛЕГЕНОВНА

Тізбектер кеңістігінде матрицалық операторлар бір класының салмақты бағалаулары

6D060100 – Математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілер
Ph.D, доцент
Темирханова А.М.,

физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор
Султанаев Я.Т.
(Ресей Федерациясы)

Қазақстан Республикасы
Астана, 2026

МАЗМҰНЫ

Кіріспе

Диссертациялық жұмыс салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде анықталған матрицалық операторлардың салмақты бағалауларына арналған.

Зерттеу өзектілігі. Матрицалық операторлар математиканың әртүрлі салаларында кең қолданылады, мысалы, сандық әдістер, гармоникалық анализ, ықтималдықтар теориясы, айырымдық теңдеулер теориясында және жаратылыстану, инженерлік, экономикалық ғылымдардың есептерінде. Сонымен қатар, [1] жұмыста интегралдық операторлар теориясы мен енгізу теориясы есептерін шешу үшін дискреттеу әдісі жасалды және бұл әдіс матрицалық операторды бағалауына сүйенетінін көрсетті. Осылайша, матрицалық операторлар теориясы маңызды, әрі әртүрлі қолданысқа ие. Ұсынылып отырған диссертациялық жұмыс осы өзекті мәселеге арналған.

Соңғы отыз жылда матрицалық операторлар теориясындағы елеулі прогресс салмақты Лебег кеңістігінде

$$(A^{+}f)_n := \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} f_k , \qquad n \in \mathbb{N} \tag{0.1}$$

түріндегі матрицалық оператордың қасиеттерін зерттеумен тығыз байланысты. (0.1) түріндегі дискретті операторларды зерттеуде негізгі мәселе олардың шенелгендігі мен компактылығының критерийлерін табу болып табылады, және де бұл критерийлердің сапасы басқа есептерді шешуде негізгі рөл атқарады, мысалы, айырымдық теңдеулердің тербелімдік және тербелімсіздік қасиеттерін зерттеуде [2], [3].

1977 жылы М. Штиглиц және Х. Тицтың [4] жұмысында (0.1) матрицалық оператордың 11 тізбектер кеңістігіндегі әсер ету нәтижелері нормаларымен бірге берілген, алайда $1 < p, q < \infty$ жағдайында матрицалық оператордың l_p кеңістігінен l_q кеңістігіне әсер етуінің шенелгендік критериі ашық сұрақ екені айтылған. Бұл мәселе осы күнге дейін ашық қалып отыр. Дегенмен, мәселе классикалық $a_{n,k} \equiv 1$ жағдайы үшін, яғни Харди операторы үшін [5-8] жұмыстарда толығымен шешілді. Дискретті және үзіліссіз Харди операторларының бастапқы формалары мен олардың жалпылауларының салмақты бағалаулары туралы толығырақ ақпаратты Г.Харди, Д.Е. Литтлвуд пен Г. Полиа [9], Б. Опик, А. Куфнер [10], А. Куфнер, Л.-Е. Перссон [11] жұмыстарынан көруге болады. Бұл тақырыптың дамуының маңызды кезеңдерінің қысқаша сипаттамасын А. Куфнер, Л. Малигранда және Л.-Е. Перссонның [12] жұмысынан көруге болады.

Әрі қарай осы мәселе бойынша зерттеушілер белгілі бір қасиеттерді қанағаттандыратын матрицалар кластарын қарастыра бастап ([13], [14] қараңыз), қазіргі уақытта «Ойнаров ядросы» класы деп аталатын матрицалар кластарының максималды жалпылауына қол жеткізді. $a_{n,k}$ матрицасының элементтері дискретті «Ойнаров шартын» қанағаттандыратын жағдайы $1 < p \leq$

$q < \infty$ үшін [15]-ші, $1 < q < p < \infty$ үшін [14]-ші және $0 < p \leq 1,\ p \leq q < \infty$ үшін [17]-ші жұмыстарда қарастырылды. Ал [18]-ші жұмыста $a_{n,k}$ матрицасы жаңартылған дискретті «Ойнаров шартын» қанағаттандыратын жағдай $1 < p, q < \infty$ үшін зерттелді. [19] жұмыста матрицалық операторлардың $\mathcal{O}_n^{\pm},\ n \geq 0$ кеңейетін кластары енгізілді және олардың матрицаларына қойылатын шарттар алдыңғы шарттардан әлсіздеу болды. Аталған жұмыста матрицалары осы кластарға жататын (0.1) операторының $1 < p \leq q < \infty$ жағдайындағы салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде шенелгендігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Ал $1 < q < p < \infty$ жағдайы үшін матрицалары $\mathcal{O}_n^{+}, \mathcal{O}_n^{-},\ n \geq 2$ кластарына тиісті болғанда (0.1) операторының салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде шенелгендігі ашық мәселе күйінде қалды. $1 < q < p < \infty$ жағдайы үшін $\mathcal{O}_1^{\pm}$ класына жататын матрицалық оператордың салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде шенелгендігінің алғашқы нәтижелері [20], [21] жұмыстарда алынды.

Бұл диссертациялық жұмыста қарастырылатын бірінші есеп, *ол* $1 < q < p < \infty$ *жағдайы үшін матрицалары* $\mathcal{O}_2^{\pm}$ *кластарына тиісті болатын (0.1) матрицалық оператордың Лебег тізбектер кеңістігінде салмақты бағалауын зерттеу.*

Аталған матрицалық операторлар анализдің әртүрлі есептерінде, мысалы, функциялар теориясы, гармоникалық анализ, дифференциалдық теңдеулер теориясы т.б. есептерінде кеңінен қолданылатын $\mathcal{K}f(x) = \int_0^x K(x,s)f(s)ds$ Вольтерра интегралдық операторының дискретті аналогы болып табылады. Алайда бұл оператордың $L_2(0,\infty)$ кеңістігінің өзінде де $K(\cdot,\cdot) \geq 0$ ядросының жалпы жағдайы үшін шенелгендік критериін анықтау қиын есеп болып табылады. Бұл бағыттағы алғашқы жұмыстар $1 < p, q < \infty$ жағдайында $L_{p,v}$ кеңістігінен $L_{q,u}$ кеңістігне әсер ететін Риман-Лиувилль бөлшектеп интегралдау операторының шенелгендік критерийін анықтаған Ф. Мартин-Рейес пен Е. Сойердің [22], В.Д. Степановтың [23-26] жұмыстары болды. Р. Ойнаров [27] және одан тәуелсіз С. Блум мен Р. Керман [28] жұмыстарында $\mathcal{K}$ операторының ядросы келесі шартты қанағаттандыратын жағдайы қарастырылды

$$\frac{1}{d}(K(x,t) + K(t,s)) \leq K(x,s) \leq d\big(K(x,t) + K(t,s)\big), \qquad (0.2)$$

$x \geq t \geq s > 0,\ d \geq 1$. Бұл операторлар кластарының маңыздылығы сол, ол бөлшектеп интегралдаудың барлық белгілі операторларын қамтиды [22, p.728], [24, с.15], [25, с.19] және көптеген зерттеулер объектісі болды (мысалы, [29-32]). $\mathcal{K}$ операторының $K(\cdot,\cdot)$ ядросына қойылатын осы шарт математикалық әдебиетте «Ойнаров шарты» деп аталады.

2007 жылы шыққан Р. Ойнаровтың [33] жұмысы осы обылыстағы зарттеулердің дамуына үлкен үлес қосты. Бұл жұмыста Вольтерра типті $\mathcal{K}$ интегралдық операторлардың кеңейтілетін класы енгізілді және сол операторлар үшін Лебег кеңістігінде шенелгендік және компактылық критерийлері алынды. Бұл кеңейтілетін ядролар класы $\mathcal{O}_n^{\pm}$ матрицалар кластарының интегралдық аналогы болып табылады. Функцияның үзіліссіздігіне негізделген интегралдық жағдайдағы әдістерді дискретті жағдайға қолдануға мүмкіндік бермейді, бұл $\{f_i\}$ және $\{(A^{\pm}f)_i\}$ тізбектерінің өзгеруінің дискреттігімен байланысты. Сол себепті дискретті жағдайдың негізгі нәтижелері интегралдық жағдайға қарағанда біршама кеш шықты.

Харди типтес интегралдық оператор жалпылауларының бір түрі интегралдау облысы айнымалы болатын интегралдық оператор болып табылады. 1998 жылы шыққан Г.П. Хайниг пен Г. Синнамон [34] жұмысында $Hf(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(y)dy$ түрдегі интегралдау шектері айнымалы болатын Харди операторы қарастырылды, мұндағы $a(x)$ және $b(x)$ келесі шарттарды қанағаттандырады:

(i) $a(x)$ және $b(x)$ үзіліссіз, R^+ кеңістігінде қатаң өспелі;

(ii) $a(x) < b(x),\ \forall x \in (0,\infty),\ a(0) = b(0) = 0,\ a(\infty) = b(\infty) = \infty.$

[34] жұмысында $1 < p \leq q < \infty$ үшін H операторының шенелгендік критерийі, ал $0 < q < p < \infty,\ p > 1$ жағдайы үшін H операторының шенелгендігінің жеткіліктілік шартын алды. В.Д. Степанов пен Е.П. Ушакованың [32, с.299], [35] еңбектерінде «фарватер функциясын» енгізу арқылы H интегралдық операторының шенелгендік және компактылық критерийлері алынды, сонымен қатар С.Л. Соболев салмақты кеңістігінің Лебег салмақты кеңістігіне енгізу теоремаларының орындалуының осы оператордың шенелгендігімен байланысы анықталды.

Интегралдау шектері айнымалы болатын H интегралдық операторының $\widetilde{K}f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,y)f(y)dy$ түріндегі жалпыламасы Т. Чен, Г. Синнамон [36] және А. Гогатишвили, Дж. Лэнг [37] еңбектерінде зерттелген, мұнда $1 < p \leq q < \infty$ болған кезде, $K(x,y)$ ядросы (0.2) шартын жалпылайтын шартты қанағаттандырған жағдайда $\widetilde{K}$ операторының шенелгендік критерийі табылды. Сонымен қатар $\widetilde{K}$ операторы $\mathcal{K}$ операторын жалпылайды. [32, с.300] жұмыста $Kf(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} K(y,x)f(y)dy$ операторының салмақты Лебег кеңістігінде $1 < p, q < \infty$ жағдайындағы шенелімдігі мен компактылығы алынды. 2011 жылғы Р. Ойнаровтың [38] жұмысында интегралдау шектері айнымалы болатын және теріс емес ядролары бар $\widetilde{K}$, K операторлары қарастырылып, олар үшін ядроның алдыңғы шарттарына қарағанда әлсіз шарттармен Лебег салмақты кеңістіктерінде $1 < p \leq q < \infty$ жағдайы үшін шенелгендік және компактылық шарттары алынды.

$\widetilde{K}$ түріндегі операторлардың дискретті жағдайына келетін болсақ, олар толық зерттелмеген. Тек H операторы үшін А. Алхалил [39-41] еңбектерінде интегралдау шектері айнымалы болатын интегралдық операторлардың дискретті аналогы қарастырылды, және де p мен q параметрлерінің барлық мүмкін жағдайлары үшін салмақты Лебег тізбектер кеңістіктерінде қосындылау шектері айнымалы болатын дискретті оператордың шенелгендік критерийлері алынды. Ядросы бар, интегралдау шектері айнымалы болатын K интегралдық оператордың бағалауының дискретті жағдайы әлі зерттелмеген. Сондықтан осы диссертациялық жұмыста келесі есептер қарастырылады:

- *Лебег тізбектер кеңістіктерінде қосындылау шектері айнымалы болатын матрицалық операторлардың салмақты бағалауын зерттеу;*

- *монотонды тізбектер жиынында қосындылау шектері айнымалы болатын матрицалық операторлардың салмақты бағалауын зерттеу;*

- *қосындылау шектері айнымалы болатын матрицалық оператордың компактылық критерийін зерттеу;*

Жұмыстың мақсаты. Диссертациялық жұмыстың негізгі мақсаты Лебег тізбектер кеңістігінде матрицалық операторлардың кейбір кластары үшін салмақты теңсіздіктердің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттарын алу болып табылады.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы. Диссертациялық жұмыста келесі дискреттік операторлар қарастырылады: $O_2^{\pm}$ Ойнаров класында жататын матрицалық операторлар, қосындылау шектері айнымалы болатын матрицалық операторлар және Гильберт-Стилтьес типтес операторлар қарастырылады.

Алынған нәтижелер:

- $1 < q < p < \infty$ жағдайы үшін салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде $O_2^{\pm}$ кластарына жататын матрицалық операторлардың матрицалар элементтері мен салмақты тізбектер терминінде шенелгендігінің қажетті және жеткілікті шарттары;

- $1 < p \leq q < \infty$ жағдайы үшін салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде қосындылау шектері айнымалы болатын матрицалық оператордың матрицалар элементтері мен салмақты тізбектер терминінде шенелгендігінің қажетті және жеткілікті шарттары;

- $1 < p \leq q < \infty$ жағдайы үшін салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде қосындылау шектері айнымалы болатын матрицалық оператордың компактылығының критерийі;

- монотонды тізбектер жиынында қосындылау шегі айнымалы болатын матрицалық оператордың салмақты бағалауы;

-$1 < p, q < \infty$ жағдайы үшін салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде Гильберт-Стилтьес типтес дискретті оператордың салмақты бағалаулары.

Зерттеу әдісі. Локализация әдісі, «Батуев-Степановтың блок-диагональды әдісі», әртүрлі классикалық теңсіздіктер, сонымен қатар салмақты Харди теңсіздіктері.

Алынған нәтижелердің теориялық және практикалық құндылығы. Жұмыс теориялық сипатта. Оның нәтижелерін функциялар теориясында, Соболев типті дискретті салмақты кеңістіктерді енгізу теориясында және айырымдық операторлар теориясында қолдануға болады.

Алынған нәтижелерді апробациялау. Негізгі нәтижелер бойынша халықаралық конференцияларда және ғылыми семинарларда баяндамалар жасалды:

- «Анализ, дифференциалдық теңдеулер және алгебраның өзекті мәселелері» атты халықаралық ғылыми конференция (EMJ-2019), Нұр-Сұлтан, 2019 ж.;

- «Математика, механика және информатиканың теориялық және қолданбалы мәселелері» халықаралық ғылыми конференция, Қарағанды, 2019 ж.;

- Қазақстан Республикасы ғылым қызметкерлері күніне орай Халықаралық сәуір математикалық конференциясы, Алматы, 2020 ж.;

- «Математикалық физиканың заманауи әдістері және оларды қолдану» шетел ғалымдарының қатысуымен республикалық ғылыми конференция, Өзбекстан, Ташкент, 2020 ж.;

- Грузия математикалық одағының XI халықаралық конференциясы, Грузия, Батуми, 2021 ж. ;

- Қазақстан Республикасының Ғылым күніне орай дәстүрлі халықаралық сәуір математикалық конференциясы, Алматы 2023;

- «Анализ, дифференциалдық теңдеулер және олардың қолданылуы» атты халықаралық ғылыми-практикалық конференция Астана, 2023 ж.;

- Түркі әлемі математиктерінің VII Дүниежүзілік конгресі (TWMS Congress-2023), 20-23 қыркүйек 2023 ж., Түркістан, Қазақстан;

- Математика және математикалық білім бойынша халықаралық конференция (ICMME-2024), Невшехир Хажы Бекташ Вели университеті, Кападокия университеті, Невшехир, Түркия, 3-5 қазан 2024 ж.;

Еуразия математикалық ғылыми зерттеу институтының «Функционалдық анализ және оның қосымшалары» атты ғылыми семинарында баяндамалар жасалынды.

Жарияланымдар. Диссертациялық жұмыс бойынша 5 мақала жарияланды. Олардың ішінде 2 жұмыс Scopus деректер қорына енетін және CiteScore процентилі 25-тен кем емес болатын ғылыми журналда [42], [43], 2 мақала Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласында сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынатын ғылыми басылымдарда [44], [45], 1 мақала Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласында сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынатын тізімге енбеген журналда [46]. 9 жұмыс халықаралық ғылыми конференциялар тезистері жинақтарында, оның ішінде 3 жұмыс шетелде өткен конференция мақалаларының тезистер жинағында жарияланды.

Диссертацияның құрылымы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Әр бөлім тармақтарға бөлінген.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Диссертациялық жұмыстың бірінші бөлімі шолу сипатына ие және 2 бөлімшеден тұрады, бұл бөлімшелерде диссертация тақырыбына жақын және кейінгі жылдары жария болған белгілі нәтижелер келтірілген. Бірінші бөлімшеде салмақты тізбектер кеңістігіндегі дискретті Харди теңсіздіктері, екінші бөлімшеде өспейтін теріс емес тізбектер жиынындағы дискретті Харди теңсіздіктері туралы жазылған.

Диссертациялық жұмыстың негізгі бөлімі екінші және үшінші бөлімде келтірілген.

Екінші бөлім 2 бөлімшеден тұрады және онда салмақты Лебег тізбектер кеңістігіндегі матрицалық операторлардың бір класының $q < p$ жағдайындағы шенелгендігі қарастырылған. Оның 1-ші бөлімшесінде $\mathcal{O}_2^{\pm}$ - Ойнаров класына жататын матрицалар кластарының анықтамасы мен мысалдар келтірілген, ал 2-і бөлімшесінде матрицасы $\mathcal{O}_2^{\pm}$ класында жататын (0.1) түріндегі матрицалық оператордың және оған түйіндес оператордың шенелгендік критерийі қарастырылған.

Айталық $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ болсын. $u = \{u_i\}$ – теріс емес сандар тізбегі, $v = \{v_i\}$ - оң сандар тізбегі болсын және оларды салмақты тізбек деп атайық. $l_{p,v}$– барлық $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ нақты сандар тізбектерінің кеңістігі болсын, және нормасы келесідей анықталсын

$$\|f\|_{p,v} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

A^{+} және оған түйіндес

$$(A^{-}f)_n \coloneqq \sum_{k=n}^{\infty} a_{k,n} f_k, \quad n \geq 1$$

операторының $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелгендігі келесі теңсіздіктің орындалуына эквивалентті

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n (A^{\pm} f)_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n v_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall f \in l_p, \quad (0.3)$$

мұндағы (0.3) теңсіздіктегі ең кіші оң тұрақты және $(a_{i,j})$ – үшбұрышты сандық матрица, оның элементтері үшін $i \geq j \geq 1$ болғанда $a_{i,j} \geq 0$, ал $i < j$ болғанда $a_{i,j} = 0$ орындалады.

$a_{i,j} = 1,\ i \geq j \geq 1$ болғанда (0.1) операторы дискретті Харди операторын береді, ол операторды көптеген авторлар өз жұмыстарында зерттеген, және негізгі нәтижелер [5, p.406; 6, p. 392; 7, p.152; 8, p.285; 9, c.35; 11, p.51] жұмыстарда алынған.

Кейбір матрица кластары үшін Лебег тізбектер кеңістігінде параметрлердің әртүрлі жағдайында (0.1) операторының шенелгендік критерийі белгілі ([13, p.835; 14, p. 388; 15, c. 40; 16, p. 845; 17, p.64; 18, p.30, 19, p.7; 20. p.117; 21, p.75] жұмыстарын қараңыз).

Бұл бөлімде диссертациялық жұмыстың бірінші есебі, яғни $1 < q < p < \infty$ жағдайында A^{+}, A^{-} операторларының $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелімдігі қарастырылады, мұндағы матрица $\mathcal{O}_2^{\pm}$ класында жатады.

$\mathcal{O}_2^{+}$ пен $\mathcal{O}_2^{-}$ кластарының анықтамаларын келтірейік.

Анықтама 0.1. *Айталық, $(a_{i,j})$ теріс емес және барлық $i \geq j \geq 1$ үшін бірінші индексі бойынша кемімейтін матрица болсын. $(a_{i,j})$ матрицасы $\mathcal{O}_2^{+}$ класына тиісті болады, егер $r_2 \geq 1$ саны мен теріс емес $\left(a_{ij}^{2,0}\right), \left(a_{ij}^{2,1}\right), \left(a_{ij}^{(1)}\right)$ матрицалары табылып, барлық $i \geq k \geq j \geq 1$ үшін келесі теңсіздік орындалса*

$$\frac{1}{r_2}\left(a_{i,k}^{2,0} + a_{i,k}^{2,1} a_{k,j}^{(1)} + a_{k,j}\right) \leq a_{i,j} \leq r_2\left(a_{i,k}^{2,0} + a_{i,k}^{2,1} a_{k,j}^{(1)} + a_{k,j}\right),$$

мұндағы $\left(a_{i,j}^{(1)}\right) \in \mathcal{O}_1^{+}$.

Анықтама 0.2. *Айталық, $(a_{i,j})$ теріс емес және барлық $i \geq j \geq 1$ үшін екінші индексі бойынша өспейтін матрица болсын. $(a_{i,j})$ матрицасы $\mathcal{O}_2^{-}$ класына тиісті болады, егер $\bar{r}_2 \geq 1$ саны мен теріс емес $\left(a_{i,j}^{0,2}\right)$, $\left(a_{i,j}^{1,2}\right)$, $\left(a_{i,j}^{(1)}\right)$ матрицалары табылып, барлық $i \geq k \geq j \geq 1$ үшін келесі теңсіздік орындалса*

$$\frac{1}{\bar{r}_2}\left(a_{i,k} + a_{i,k}^{(1)} a_{k,j}^{1,2} + a_{k,j}^{0,2}\right) \leq a_{i,j} \leq \bar{r}_2\left(a_{i,k} + a_{i,k}^{(1)} a_{k,j}^{1,2} + a_{k,j}^{0,2}\right),$$

мұндағы$\left(a_{i,j}^{(1)}\right) \in \mathcal{O}_1^{-}$.

Ескерту: Оң C тұрақтысының мәні бізге маңызды болмаған жағдайда, $M \leq CK$ теңсіздігін $M \ll K$ түрінде жазамыз. Ал $M \approx K$ белгілеуі $M \ll K \ll M$ дегенді білдіреді.

Осы бөлімнің негізгі нәтижелері.

Теорема 2.2.1 [43, p.125]. *Айталық $1 < q < p < \infty$ және $\left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{O}_2^{+}$ болсын. Онда A^{+} операторы $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелген болуы үшін $M^{+} = max\left\{M_{2,0}^{+}, M_{2,1}^{+}, M_{2,2}^{+}\right\} < \infty$ болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$M_{2,0}^{+} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=i}^{\infty}\left(a_{s,i}^{2,0}\right)^{q} u_s^{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{i} v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$M_{2,1}^{+} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=i}^{\infty}\left(a_{s,i}^{2,1}\right)^{q} u_s^{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_{i,j}^{(1)}\right)^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \Delta^{-}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_{i,j}^{(1)}\right)^{p'} v_j^{-p'}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$M_{2,2}^{+}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=i}^{\infty}u_s^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_{i,j}^{(2)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^{-}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_{i,j}^{(2)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Сонымен қатар, $\|A^{+}\|_{p\to q}\approx M^{+}$.

Теорема 2.2.2 [43, p.125]. *Айталық* $1<q<p<\infty$ *және* $\left(a_{i,j}\right)\in\mathcal{O}_2^{-}$ *болсын. Онда* A^{-} *операторы* $l_{p,v}$ *кеңістігінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне шенелген болуы үшін* $\mathcal{M}^{-}=max\{\mathcal{M}_{0,2}^{-},\mathcal{M}_{1,2}^{-},\mathcal{M}_{2,2}^{-}\}<\infty$ *болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$\mathcal{M}_{0,2}^{-}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{i}\left(a_{i,s}^{0,2}\right)^{q}u_s^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}v_i^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathcal{M}_{1,2}^{-}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{i}\left(a_{i,s}^{1,2}\right)^{q}u_s^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=i}^{\infty}\left(a_{j,i}^{(1)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^{+}\left(\sum_{j=i}^{\infty}\left(a_{j,i}^{(1)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathcal{M}_{2,2}^{-}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{i}u_s^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=i}^{\infty}\left(a_{j,i}^{(2)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^{+}\left(\sum_{j=i}^{\infty}\left(a_{j,i}^{(2)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Сонымен қатар, $\|A^{-}\|_{p\to q}\approx\mathcal{M}^{-}$.

Теорема 2.2.3 [43, p.126]. *Айталық* $1<q<p<\infty$ *және* $\left(a_{ij}\right)\in\mathcal{O}_2^{+}$ *болсын. Онда* A^{-} *операторы* $l_{p,v}$ *кеңістігінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне шенелген болуы үшін* $M^{-}=max\{M_{2,0}^{-},M_{2,1}^{-},M_{2,2}^{-}\}<\infty$ *болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$M_{2,0}^{-}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=i}^{\infty}\left(a_{s,i}^{2,0}\right)^{p'}v_s^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{i}u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}}u_i^q\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$M_{2,1}^{-}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=i}^{\infty}\left(a_{s,i}^{2,1}\right)^{p'}v_s^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_{i,j}^{(1)}\right)^{q}u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\Delta^{-}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_{i,j}^{(1)}\right)^{q}u_j^q\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$M_{2,2}^{-} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=i}^{\infty} v_s^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{j=1}^{i} \left(a_{i,j}^{(2)} \right)^q u_j^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \Delta^{-} \left(\sum_{j=1}^{i} \left(a_{i,j}^{(2)} \right)^q u_j^q \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Сонымен қатар, $\|A^{-}\|_{p\to q} \approx M^{-}$.

Теорема 2.2.4 [43, p.126]. *Айталық* $1 < q < p < \infty$ *және* $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_2^{-}$ *болсын. Онда* A^{+} *операторы* $l_{p,v}$ *кеңістігінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне шенелген болуы үшін* $\mathcal{M}^{+} = max\{\mathcal{M}_{0,2}^{+}, \mathcal{M}_{1,2}^{+}, \mathcal{M}_{2,2}^{+}\} < \infty$ *болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$\mathcal{M}_{0,2}^{+} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{i} \left(a_{i,s}^{2,0} \right)^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=i}^{\infty} u_j^q \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} u_i^q \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathcal{M}_{1,2}^{+} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{i} \left(a_{i,s}^{1,2} \right)^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=i}^{\infty} \left(a_{j,i}^{(1)} \right)^q u_j^q \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \Delta^{+} \left(\sum_{j=i}^{\infty} \left(a_{j,i}^{(1)} \right)^q u_j^q \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathcal{M}_{2,2}^{+} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{i} v_s^{-p'} \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=i}^{\infty} \left(a_{j,i}^{(2)} \right)^q u_j^q \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \Delta^{+} \left(\sum_{j=i}^{\infty} \left(a_{i,j}^{(2)} \right)^q u_j^q \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Сонымен қатар, $\|A^{+}\|_{p\to q} \approx \mathcal{M}^{+}$.

Үшінші бөлімде диссертациялық жұмыстың екінші және үшінші есептері келтірілген. Ол 4 бөлімшеден тұрады. 3.1-бөлімде $1 < p \le q < \infty$ жағдайы үшін салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде қосындылау шектері айнымалы болатын матрицалық оператордың шенелгендігі, ал 3.2-бөлімде – осы оператордың компактылығы қарастырылады.

$\forall n \in \mathbb{N}$ үшін $K_n := \{k \in \mathbb{N}:\ k \le n,\ \alpha(n) \le \beta(k)\}$ жиынын қарастырайық, мұндағы $\alpha(n),\ \beta(n)$ — натурал сандар тізбектері, сонымен қатар:

i) $\alpha(n),\ \beta(n)$ — қатаң өспелі тізбектер;

ii) $\alpha(n) = \beta(n) = 1$ және $n \ge 2$ болғанда $\alpha(n) < \beta(n)$.

Бұл шарттардан $n \ge 2$ үшін $n \le \alpha(n) < \beta(n)$ шығады.

Келесі түрдегі қосындылау шектері айнымалы болатын $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне әсер ететін матрицалық операторды қарастырайық

$$(Af)_n = \sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)} a_{n,k} f_k\,, \quad n \geq 1, \tag{0.4}$$

мұндағы A операторының $(a_{n,k})$ матрицасы келесі шартты қанағаттандырады: $d \geq 1$ *тұрақтысы,* $\omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ *- оң сандар тізбегі, теріс емес* $(b_{i,j})$ *матрицасы табылып, барлық* $k, m\colon k \in K_n$, $\alpha(n) \leq m \leq \beta(k)$ *үшін келесі теңсіздік орындалсын*

$$\frac{1}{d}\left(b_{n,k}\omega_m + a_{k,m}\right) \leq a_{n,m} \leq d\left(b_{n,k}\omega_m + a_{k,m}\right). \tag{0.5}$$

3-ші бөлімнің алғашқы екі бөлімшесінің нәтижелерін келтірейік:

Теорема 3.1.1 [42, p.67]. *Айталық* $1 < p \leq q < \infty$ *болсын.* $(a_{n,k})$ *матрицасының элементтері (0.5) шартын қанағаттандырсын. Онда (0.4) операторы* $l_{p,v}$ *кеңістігінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне шенелген болуы үшін* $F = F_1 + F_2 < \infty$ *болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$F_1 = \sup_{m\geq 1} \sup_{m\leq s\leq \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{m,k}^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$F_2 = \sup_{m\geq 1} \sup_{m\leq s\leq \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q b_{n,m}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} \omega_k^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Сонымен қатар, $\|A\|_{l_{pv}\to l_{qu}} \approx F$.

Теорема 3.2.1 [42, p.72]. *Айталық* $1 < p \leq q < \infty$ *және* $(a_{n,k})$ *матрицасының элементтері (0.5) шартын қанағаттандырсын. Онда (0.4) операторы* $l_{p,v}$ *кеңістігінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне компакт болады сонда тек сонда, егер*

$$\lim_{m\to\infty} (F_1)_m = 0,$$
$$\lim_{m\to\infty} (F_2)_m = 0,$$

$$(F_1)_m = \sup_{m\leq s\leq \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{m,k}^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$(F_2)_m = \sup_{m\leq s\leq \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q b_{n,m}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} \omega_k^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{q}}$$

болса.

3.3 бөлімі теріс емес өспейтін тізбектер жиынында жоғарғы қосындылау шегі айнымалы болатын матрицалық оператордың салмақты бағалауына арналған. Монотонды функциялар мен тізбектер үшін Харди типтес теңсіздіктер Лоренц кеңістіктерінің операторларының шенелгендігін, сонымен қатар осы кеңістіктердің енгізулерін зерттеуде қолданылады. Есепті шешудегі негізгі әдіс редукция әдісі болып табылады. Ол әдіс монотонды тізбектер конусындағы Харди типтес теңсіздіктерді барлық теріс емес тізбектер үшін Сойер принципін пайдалану арқылы белгілі теңсіздікке түрлендіруге мүмкіндік береді.

Айталық $u=\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ - теріс емес, $v=\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ - оң нақты сандар тізбектері болсын. Айталық $g=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$- $l_{p,v}$ кеңістігінен алынған теріс емес өспейтін тізбек болсын.

Келесі түрде берілген жоғарғы қосындылау шегі айнымалы болатын матрицалық операторды қарастырайық:

$$(Ag)_n=\sum_{i=1}^{\beta(n)} a_{n,i}g_i\,,\ \ n\in\mathbb{N}, \tag{0.6}$$

мұндағы $\beta(n)$ – келесі қасиетке ие натурал сандар тізбегі:

1) қатаң өспелі;
2) $\beta(1)=1,\quad n<\beta(n),\ n\geq 2;$

$(a_{n,k})$ — A операторының теріс емес матрицасы және оның элементтері келесі жалпыланған дискретті «Ойнаров шартын» қанағаттандырады: $d\geq 1$ *саны,* $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ *оң сандар тізбегі, теріс емес* $(b_{i,j})$ *матрицасы табылып, барлық* $1\leq k\leq n$ *және* $i\leq\beta(k)$ *үшін келесі теңсіздік орындалсын*

$$\frac{1}{d}\left(b_{n,k}\omega_i+a_{k,i}\right)\leq a_{n,i}\leq d\left(b_{n,k}\omega_i+a_{k,i}\right). \tag{0.7}$$

(0.6) операторының келесі түрдегі салмақты бағалауын қарастырайық

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q\,(Ag)_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n^p v_n^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad \downarrow g\geq 0. \tag{0.9}$$

Айталық

$$\mathcal{F}_1=\sup_{s\geq 1}\left(\sum_{n=1}^{s} u_n^q\left(\sum_{j=1}^{n} a_{n,\beta(j)}\right)\right)^{\frac{1}{q}}(V_s)^{-\frac{1}{p}},$$

$$\mathcal{F}_2 = \sup_{s\geq 1}\left(\sum_{n=s}^{\infty} b_{n,s}^q u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{s}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)W_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\mathcal{F}_3 = \sup_{s\geq 1}\left(\sum_{n=s}^{\infty} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{s}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)A_{s,k}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Теорема 3.3.1 [45, б.138]. *Айталық* $1 < p \leq q < \infty$ *болсын. (0.9) теңсіздігі өспейтін теріс емес* $(\downarrow g \geq 0)$ *тізбектері үшін орындалады сонда тек сонда, егер* $\mathcal{F} = max\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\} < \infty$ *болса. Сонымен қатар,* $\mathcal{F} \approx C$, *ал* C *– (0.9)-теңсіздігінің ең кіші оң тұрақтысы.*

3 бөлімнің төртінші бөлімшесінде Лебег тізбектер кеңістігінде Гильберт-Стилтьес типтес оператордың салмақты бағалауының қажетті және жеткілікті шарттарын анықтау есебі қарастырылған. Бұл бағалаулар Лебег тізбектер кеңістігінде жоғарғы және төменгі қосындылау шектері айнымалы болатын дискретті Харди типтес теңсіздіктерге келтіру арқылы дәлелденеді. Қосындылау шектері айнымалы болатын Харди типтес дискретті операторладың салмақты теңсіздіктері [39, с.56], [40, с.6], [41, с.48] А. Альхалил жұмыстарында дәлелденген болатын, алайда біз осы теңсіздіктердің жеткіліктік жағдайының дәлелдеулерінің альтернативті әдісін келтіреміз.

Гильберт-Стилтьестің жалпыланған теңсіздігін қарастырайық

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(Tf)_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty}|v_n f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_{p,v}, \qquad (0.10)$$

мұндағы

$$(Tf)_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{(b(k)+b(n))^{\gamma}}, \quad \gamma > 0 \qquad (0.11)$$

Гильберт-Стилтьес типтес операторы, $\gamma > 0$ және $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кемімейтін бейнелеу, және де $b(1) = 1$, $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$.

$1 < p \leq q < \infty$ және $1 < q < p < \infty$ жағдайлары үшін Гильберт-Стилтьес типтес оператордың салмақты бағалауының негізгі нәтижелерін келтірейік:

Теорема 3.4.1 [46, p.18]. *Айталық* $1 < p \leq q < \infty$. *Онда (0.10) теңсіздіктің орындалуы үшін* $D = D_1 + D_2 < \infty$ *болуы қажетті және жеткілікті,мұндағы*

$$D_1 = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{u_i}{b^{\gamma}(i)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{b(n)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$D_2 = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=b(n)}^{\infty}\left(\frac{v_k}{b^{\gamma}(k)}\right)^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Сонымен қатар, $D \approx C$, *мұндағы* C *– (0.10) теңсіздіктің ең кіші тұрақтысы.*

Теорема 3.3.4 [44, с.10]. *Айталық* $1 < q < p < \infty$ *болсын. Онда (0.10) теңсіздіктің орындалуы үшін* $E = E_1 + E_2 < \infty$, *болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$E_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{\infty}\frac{u_j^q}{b^{\gamma}(j)}\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty,$$

$$E_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty}\frac{v_j^{-p'}}{b^{\gamma}(j)}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{b^{-1}(k)} u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty.$$

Сонымен қатар, $E \approx C$, *мұндағы* C *– (0.10) теңсіздіктің ең кіші тұрақтысы.*

3.4-бөлімшенің негізгі нәтижелерін алу үшін келесі түрде берілген қосындылау шектері айнымалы болатын Харди операторларының дискретті салмақты бағлаулары қосымша дәлелденді:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\sum_{k=1}^{b(n)} f_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{k=1}^{\infty}|v_k f_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_{p,v}, \tag{0.12}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\sum_{k=b(n)}^{\infty} f_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{k=1}^{\infty}|v_k f_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_{p,v}. \tag{0.13}$$

Осы теңсіздіктердің орындалуы А. Альхалилдің [39, с.56], [40, с.10] жұмыстарында зерттелген, алайда ол бұл жұмыстарда $\{b(n)\}$ тізбегін қатаң өспелі натурал сандар тізбегі деп қарастырған. Біз $1 < q < p < \infty$ жағдайда сол шартты қалдырамыз, ал $1 < p \leq q < \infty$ жағдайда $\{b(n)\}$ тізбегін кемімейтін тізбек ретінде аламыз және екі жағдайда да дәлелдеудің жеткілікті жағдайын А. Альхалилдің дәлелдеуінен өзгеше әдіспен, осыған дейін [47] жұмыста қолданылған локализация әдісімен дәлелдейміз.

Теорема 3.4.2 [46, p.18]. *Айталық* $1 < p \leq q < \infty$ *болсын. Онда (0.12) теңсіздік орындалады сонда тек сонда, егер*

$$A_1 = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{b(n)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

болса. Сонымен қатар, $A \approx C$, *мұнда* C *– (0.12) теңсіздіктің ең кіші оң тұрақтысы.*

Теорема 3.4.3 [46, p.20]. *Айталық* $1 < p \leq q < \infty$ *болсын. Онда (0.13) теңсіздік орындалады сонда тек сонда, егер*

$$A_2 = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=b(n)}^{\infty} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

болса. Сонымен қатар, $C \approx B$, *мұнда* C *– (0.13) теңсіздіктің ең кіші оң тұрақтысы.*

Теорема 3.4.5 [44, p.10]. *Айталық* $1 < q < p < \infty$. *Онда (0.13) теңсіздік орындалады сонда тек сонда, егер*

$$B_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty$$

болса. Сонымен қатар, $B_1 \approx C$, *мұнда* C *– (0.13) теңсіздіктіктің ең кіші оң тұрақтысы.*

Теорема 3.4.6 [44, p.14]. *Айталық* $1 < q < p < \infty$ *болсын. Онда (0.13) теңсіздік орындалады сонда тек сонда, егер*

$$B_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{b^{-1}(k)} u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}} v_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty.$$

Сонымен қатар, $B_2 \approx C$, *мұнда* C *– (0.13) теңсіздіктіктің ең кіші оң тұрақтысы.*

1. ХАРДИ ТИПТЕС САЛМАҚТЫ ТЕҢСІЗДІКТЕР

1.1. Салмақты тізбектер кеңістігіндегі дискретті Харди типтес теңсіздіктер

Бұл диссертацияның тақырыбы дискретті салмақты Харди теңсіздігімен байланысты, сондай-ақ зерттеу барысында дискретті салмақты Харди теңсіздігінің нәтижелері пайдаланылады, сондықтан бұл бөлімде біз қажетті қысқаша ақпарат беріп, дискретті салмақты Харди типтес теңсіздіктер бойынша негізгі нәтижелерді береміз.

1919 жылы қос қатар үшін Гильберт теңсіздігін дәлелдеудің қарапайым әдісін іздеу барысында классикалық Харди теңсіздігінің алғашқы нұсқасы болып табылатын дискретті және үзіліссіз теңсіздіктері дәлелденді. 1925 жылы Г. Харди [48] жұмысында келесі теңсіздікті дәлелдеді:

Айталық $p > 1$ және $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ қатары жинақталатындай теріс емес нақты сандар тізбегі болсын. Сонда келесі түрдегі дискретті Харди теңсіздігі орындалады

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p, \tag{1.1.1}$$

үзіліссіз Харди теңсіздігі: $p > 1$ және f - кез келген $x > 0$ үшін $(0,\infty)$ аралығында p дәрежесі бойынша интегралданатын теріс емес функция болсын, онда

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)\,dt\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f^p(x)dx. \tag{1.1.2}$$

Айта кетейік, (1.1.1) және (1.1.2) теңсіздіктерінің оң жағындағы $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ тұрақтысы ең кіші оң тұрақты.

(1.1.1) және (1.1.2) теңсіздіктерінен келесі шығады: егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} h_n^p(a) < \infty$, мұндағы $a = \{a_n\}$, $a_n \ge 0$, және де $h(a) = \{h_n(a)\}$, $h_n(a) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ - дискретті Харди операторы. Үзіліссіз жағдай үшін: егер $\int_0^{\infty} f^p(x) < \infty$ болса, онда $\int_0^{\infty}\left(H\,f(x)\right)^p dx < \infty$, мұндағы $f(x) \ge 0$ және $H\,f(x) := \frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)dt$ – интегралдық Харди операторы.

Харди теңсіздігінің әртүрлі жалпылауларымен көптеген зерттеушілер айналысты және бұл мәселелердің тарихы мен алынған нәтижелерінің қысқаша тарихы [5, p.407; 6, p. 389; 7, p.156; 8, p.284; 9, c.35; 11, p.11; 12, p.19] жұмыстарда берілген. Классикалық Харди теңсіздігінің салмақты жалпылаулары келесі теңсіздік болады:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{p,q}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p v_n\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1.3}$$

және оның үзіліссіз аналогы

$$\left(\int_a^b \left|\int_a^x f(t)dt\right|^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{p,q}\left(\int_a^b |f(x)|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1.4}$$

Бұл теңсіздіктерді салмақты Харди теңсіздіктері деп атайды.

Өткен ғасырдың 60-шы жылдарынан бастап бұл теңсіздіктер қарқынды зерттеле басталды. Алдымен салмақты Харди теңсіздігінің үзіліссіз аналогтары бойынша нәтижелер алынды. 1969–1980 жылдар аралығында $1 \leq p, q \leq \infty$ жағдайлардағы (1.1.4) теңсіздігінің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары алынып, $C_{p,q}$ - ең кіші тұрақтысы бағаланды ([8, p.284; 9, c.35] қараңыз).

Біздің зерттеулер (1.1.3) теңсіздігімен байланысты болғандықтан, оған толығырақ тоқталамыз.

(1.1.3) дискретті теңсіздік бойынша алғашқы нәтижелер К.Ф. Андерсен мен Г.П. Хейниг [13, p.843] жұмысына тиісті, өз жұмысында олар $1 \leq p < q < \infty$ жағдайында

$$\sup_{n\in N}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

болғанда (1.1.3) теңсіздігінің орындалуын көрсетті.

1985 жылы [14, p.388] жұмысында Г.П. Хейниг (1.1.3) теңсіздігінің орындалуының жеткілікті шартын алды. Ол $1 \leq q < p < \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ жағдайында және

$$B := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{r}{q}}\left(\sum_{k=-\infty}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}} v_n^{1-p'}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

болғанда (1.1.3) теңсіздігінің $C \le q^{\frac{1}{q}}(p')^{\frac{1}{q'}}B$ шамасымен орындалуын көрсетті.

1987–1991 жылдары Г. Беннетт [5, p.407; 6, p. 389; 7, p.156;] $0 < q < 1 < p < \infty$ жағдайдан басқа барлық p, q жағдайлары үшін (1.1.3) бағалауының орындалуының толық сипаттамасын берді, ал $0 < q < 1 < p < \infty$ жағдайдың орындалу критерийі М.Ш. Браверман, В.Д. Степанов [8, p.285] жұмысында келтірілді. [12, p.58] кітаптағы негізгі нәтижелерді келтірейік:

Теорема 1.1.1. *(i) Айталық* $1 < p \le q < \infty$. *(1.1.3) теңсіздігі орындалуы үшін*

$$A_1 \coloneqq \sup_{n\in N}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

немесе

$$A_2 \coloneqq \sup_{n\in N}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\left(\sum_{m=1}^{k} v_m^{1-p'}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

немесе

$$A_3 \coloneqq \sup_{n\in N}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{-\frac{1}{q'}}\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{1-p'}\left(\sum_{m=k}^{\infty} u_m\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті.

(ii) Айталық $0 < p \le 1, p \le q < \infty$. *(1.1.3) теңсіздігі орындалуы үшін*

$$A_4 \coloneqq \sup_{n\in N}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{1}{q}} v_n^{-\frac{1}{p}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті.

(iii) Айталық $1 < p < \infty,\ 0 < q < p$ *және* $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$. *(1.1.3) теңсіздігі орындалуы үшін*

$$A_5 \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{r}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{r}{p'}}\right) < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті.

(iii) *Айталық* $q < p = 1$. *(1.1.3) теңсіздігі орындалуы үшін*

$$A_6 \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right)^{\frac{q}{1-q}}\max_{1\le k\le n} v_k^{\frac{q}{q-1}}\right) < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті.

(iv) *Айталық* $0 < q < 1 < p < \infty, \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *(1.1.3) теңсіздігі орындалуы үшін*

$$A_7 := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right)^{\frac{r}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}v_k^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}} v_n^{1-p'}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті.

Айталық $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ - кез-келген нақты сандар тізбегі болсын.

Келесі түрде берілген дискретті салмақты Харди типтес теңсіздікті

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(A^{\pm}f)_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n v_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_p \qquad (1.1.5)$$

қарастырайық, мұндағы

$$(A^{+}f)_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} f_k, \;\; n \ge 1, \qquad (1.1.6)$$

$$(A^{-}f)_n \coloneqq \sum_{k=n}^{\infty} a_{k,n} f_k, \; n \ge 1 \qquad (1.1.7)$$

матрицалық операторлар, $(a_{i,j})$– үшбұрышты матрица, яғни $i \ge j \ge 1$ үшін $a_{i,j} \ge 0$, ал $i < j$ үшін $a_{i,j} = 0$. $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$- оң нақты сандар тізбегін салмақты тізбектер дейміз. (1.1.6), (1.1.7) матрицалық операторлар сызықты болғандықтан, (1.1.5) теңсіздігінің орындалуы осы операторлардың $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелген болуымен пара-пар.

(1.1.5) түріндегі салмақты бағалауға қатысты осыған дейін белгілі нәтижелеріне тоқталайық:

- бұл бағыттағы алғашқы нәтижелер [13, p.843] К.Ф. Андерсен мен Г.П. Хейниг жұмыстарында алынды, олар $1 \leq p \leq q < \infty$ жағдайында (1.1.5) Харди типтес дискретті теңсіздіктің орындалуының жеткілікті шартын алды, мұндағы теріс емес $\left(a_{i,j}\right)$ матрицасы элементтері i бойынша кемімейді де j бойынша өспейді.

- [15, c.40] жұмыста Р. Ойнаров, С.Х. Шалгынбаева $1 < p \leq q < \infty$ жағдайында (1.1.5) теңсіздіктің орындалуын көрсетті, [16, p.845] жұмыста Р. Ойнаров, К.А. Окпоти және Л.-Э. Перссон $1 < q < p < \infty$ жағдайы үшін (1.1.5) теңсіздігінің орындалуының критерийін алды, мұндағы матрица элементтері дискретті «Ойнаров шартын» қанағаттандырады:

$$a_{i,j} \approx \frac{a_{i,k}}{c_k} c_j + \frac{a_{k,j}}{b_k} b_i, \qquad i \geq k \geq j \geq 1 \tag{1.1.8}$$

мұндағы $c = \{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ және $b = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ - оң нақты сандардан тұратын тізбектер. Егер $\tilde{u}_i = u_i b_i^q$, $\tilde{v}_i = v_i c_i^{-p}$, $i \geq 1$, $\tilde{a}_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{b_i c_j}$, $\tilde{a}_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{b_i c_k}$, $\tilde{a}_{k,j} = \frac{a_{k,j}}{b_k c_j}$ деп белгілесек, онда (1.1.5) теңсіздігі $\left\|\tilde{A}^{\pm} f\right\|_{q,\tilde{u}} \leq C\, \|f\|_{p,\tilde{v}}$ теңсіздігіне эквивалентті болады. $\tilde{A}$ операторының $(\tilde{a}_{ij})$ матрицасы келесі шартты қанағаттандырады

$$\tilde{a}_{i,j} \approx \tilde{a}_{i,k} + \tilde{a}_{k,j} \tag{1.1.9}$$

онда (1.1.8) шарты (1.1.9) дискретті «Ойнаров шартына» эквивалентті болады.

-[47, p.893; 49] жұмыстарда $1 < p, q < \infty$ жағдайында (1.1.5) теңсіздігінің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары алынды, мұндағы $\left(a_{i,j}\right)$ матрицасының элементтері келесі шартты қанағаттандырады: $d \geq 1$ тұрақтысы, $\left\{\omega_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ оң сандар тізбегі, элементтері i бойынша кемімейтін және j бойынша өспейтін $\left(b_{i,j}\right)$ теріс емес матрицасы бар болып, барлық $i \geq k \geq j \geq 1$ үшін

$$\frac{1}{d}\left(b_{i,k}\omega_j + a_{k,j}\right) \leq a_{i,j} \leq d\left(b_{i,k}\omega_j + a_{k,j}\right) \tag{1.1.10}$$

теңсіздіктері орындалсын.

Сонымен қатар, [20, p.116; 21, p.75] жұмыстарында Ж.Таспағанбетова мен А.Темірханова $1 < p, q < \infty$ жағдайында (1.1.5) теңсіздігінің орындалуының қажетті және жеткілікті шартарын алды, мұндағы $\left(a_{i,j}\right)$ матрица элементтері келесі шартты қанағаттандырады: $d \geq 1$ тұрақтысы, $\left\{\omega_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ оң сандар тізбегі, элементтері i бойынша кемімейтін және j бойынша өспейтін $\left(b_{i,j}\right)$ теріс емес матрицасы бар болып, барлық $i \geq k \geq j \geq 1$ үшін

$$\frac{1}{d}\left(a_{i,k} + b_{k,j}\omega_j\right) \leq a_{i,j} \leq d\left(a_{i,k} + b_{k,j}\omega_j\right) \tag{1.1.11}$$

теңсіздіктері орындалсын. Айта кетейік, (1.1.9) шартымен салыстырғанда (1.1.10) және (1.1.11) шарттары әлсіздеу болып табылады, сондай-ақ олар бір бірін толықтырып тұрады.

2012 жылғы Р. Ойнаров пен Ж. Таспаганбетованың [19, p.3] жұмысында $\mathcal{O}_n^+$, $\mathcal{O}_n^-$, $n \geq 0$ кеңейетін кластары қарастырылды, мұндағы $(a_{i,j})$ матрицасына қойылған шарттар (1.1.10), (1.1.11) шарттарынан әлсіздеу болды және осы кластарда жататын матрицалар үшін $1 < p \leq q < \infty$ болған жағдайда (1.1.6), (1.1.7) операторларының салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде шенелгендігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Айта кетейік, (1.1.10) және (1.1.11) шарттарын қанағаттандыратын матрицалар сәйкесінше $\mathcal{O}_1^+$, $\mathcal{O}_1^-$ кластарында жатады.

Р. Ойнаров, Л.Э. Перссон, А. Темірханова [47] және А. Темірханова [49] жұмыстың кейбір нәтижелерін келтірейік:

Теорема 1.1.5. [47, p.893] *Айталық* $1 < p \leq q < \infty$ *және* $(a_{i,j})$ *матрица элементтері (1.1.10) шартын қанағаттандырсын. Онда (1.1.6) операторы үшін (1.1.5) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер* $G = max\{G_1,\ G_2\} < \infty$ *болса, мұндағы*

$$G_1 = \sup_{n \geq 1} \left(\sum_{i=n}^{\infty} b_{i,n}^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$G_2 = \sup_{n \geq 1} \left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Сонымен қатар, $G \approx C$ *және* $C-$ *(1.1.5) теңсіздігіндегі ең кіші оң тұрақты.*

Теорема 1.1.6. [47, p.899] *Айталық* $1 < p \leq q < \infty$, *ал* $(a_{i,j})$ *матрицасының элементтері (1.1.10) шартын қанағаттандырады. Онда (1.1.7) операторы үшін (1.1.5) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер* $G^* = max\{G_1^*,\ G_2^*\} < \infty$ *болса*

$$G_1^* = \sup_{k \geq 1} \left(\sum_{i=k}^{\infty} b_{i,k}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{j=1}^{k} \omega_j^q u_j^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$G_2^* = \sup_{k\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{k,j}^q u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сонымен қатар, $G^* \approx C$ *және* C *- (1.1.5) теңсіздігіндегі ең кіші оң тұрақты.*

Теорема 1.1.7. [49, с.119]. *Айталық* $1 < q < p < \infty$ *болсын. (1.1.6) операторының* $(a_{i,j})$ *матирицасының элементтері (1.1.10) шартын қанағаттандырсын. Онда (1.1.6) операторы үшін (1.1.5) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер* $\mathcal{G} = max\{\mathcal{G}_1,\ \mathcal{G}_2\} < \infty$ *болса, мұндағы*

$$\mathcal{G}_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} b_{j,k}^q\, u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}\omega_i^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\omega_k^{p'}\, v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathcal{G}_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{k,i}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Сонымен қатар, $\mathcal{G} \approx C$ *және* C *- (1.1.5) теңсіздігіндегі ең кіші оң тұрақты.*

Теорема 1.1.8. [49, с.126] *Айталық* $1 < q < p < \infty$ *болсын. (1.1.7) операторының* $(a_{i,j})$ *матрицасының элементтері (1.1.10) шартын қанағаттандырсын. Онда (1.1.7) операторы үшін (1.1.5) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер* $\mathcal{G}^* = max\{\mathcal{G}_1^*,\ \mathcal{G}_2^*\} < \infty$ *болса, мұндағы*

$$\mathcal{G}_1^* = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} b_{j,k}^{p'}\, v_j^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}\omega_i^q u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\omega_k^q\, v_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathcal{G}_2^* = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{k,i}^q u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Сонымен қатар, $\mathcal{G}^* \approx C$ *және* C*- (1.1.5) теңсіздігіндегі ең кіші оң тұрақты.*

1.2. Монотонды тізбектер жиынындағы Харди типтес дискретті теңсіздіктер

Функциялар теориясында, ықтималдықтар теориясында және математикалық экономика есептерінде әртүрлі экстремалды есептер мен монотонды тізбектердің, функциялардың жиындарының қасиеттері кең ауқымды қолданысқа ие. Функцияның ең жақсы жуықтауларының сандық сипаттамалары, функцияның моменттік тізбектері монотонды сандық тізбек болып табылады және олар сәйкес объектілер туралы ақпаратты береді. Бұл объектілердің сапалық қасиеттері көбінесе монотонды тізбектердің функционалдық қатынастарымен сипатталады. Сонымен қатар, талдаудың қолданбалы және теориялық есептерінің қажеттілігі басқа функционалдық кеңістіктердегі және сызықтық қасиеттері жоқ жиындардағы дискретті Харди типтес операторлар үшін салмақты бағалауларды қарастыруға әкелді, мысалы, монотонды тізбектер жиынында. Функциялар кластарының немесе сандық тізбектер кластарының қасиеттерін олардың өспейтін ауыстыруларының функционалдық қатынастарынан алуға болады, өз кезегінде олар сәйкесінше монотонды функциялар немесе тізбектер болып табылады.

Монотонды функциялар мен тізбектер конусындағы Харди типтес теңсіздіктер Лоренц кеңістігіндегі енгізу теориясы мен Лоренц кеңістіктеріндегі оператордың шенелгендігін зерттеуде қолданысқа ие. 1951 жылы Г. Лоренц [50] алғашқы рет $\Lambda^p(u),\ 0<p<\infty$ Лоренц кеңістігін енгізді:

$$\Lambda^p(u):=\left\{f:\|f^*\|_{p,u}=\left(\int_0^\infty (f^*(t))^p\,u(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}.$$

Мұндағы f^* - $|f|$ функциясының өспейтін ауыстыруы және ол келесі формуламен анықталады

$$f^*(t):=\inf\{y>0:\lambda_f(y)\le t\},$$

мұндағы λ_f – үлестірім функциясы:

$$\lambda_f(y):=meas\,\{x\in X:|f(x)|>y\}.$$

Лоренц кеңістіктеріндегі классикалық операторлардың салмақты сипаттамалары операторларды кемімелі функциялар жиынында қарастыруға итермелейді.

Келесі формуламен анықталатын Харди-Литтлвудтың Mf максималды функциясын қарастырайық

$$(Mf)(x) := \sup_{x \in |Q|} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(z)|\, dz, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

мұндағы Q – қабырғалары координата осьтеріне параллель болатын $\mathbb{R}^n$-дегі куб және $|Q|$ – оның Лебег өлшемі. Білетініміздей

$$(Mf)^*(x) \approx \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds, \qquad t > 0$$

(бұл бағалаулар бойынша қажетті ақпаратты [51], [52] көруге болады). Осылайша,

$$M: \Lambda^p(v) \to \Lambda^q(u), \quad 1 < p, q < \infty$$

бейнелеуі Лоренц кеңістігінде шенелген болатындай u және v салмақты функциялардың сипаттамалары барлық кемімелі $f \geq 0$ функциялары үшін орындалатын келесі

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right)^q u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty f^p(t) v(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.2.1)$$

Харди теңсіздігінің u және v салмақты функцияларының сипаттамаларына эквивалентті болады.

Монотонды фукциялар мен тізбектер жиынындағы Харди типтес теңсіздіктер соңғы отыз жылда қарқынды зерттелуде. 1990 жылы М. Арно мен Б. Макенхоупт [53] $1 \leq p = q < \infty$ және $u(t) = v(t)$ жағдайында f теріс емес өспейтін функциялар жиынында (1.2.1) теңсіздігінің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттарын алды:

Айталық $1 \leq p < \infty$. Онда барлық f теріс емес өспейтін функциялар үшін

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right)^p v(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_0^\infty f^p(t) v(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $D > 0$ тұрақтысы табылып және барлық $t > 0$ үшін

$$\int_0^\infty s^{-p}\, v(s)ds \le D\, t^{-p} \int_0^t v(s)ds$$

болса.

Енді 1990 жылғы Е. Сойердің [54] іргелі жұмысын айта кетейік, ол жерде автор $1 < p, q < \infty$ жағдайында әртүрлі u, v салмақтары үшін М. Арно мен Б. Макенхоуптың нәтижесін кеңейтті. Е. Сойердің бұл нәтижесі «Сойердің дуалдылық принципі» деген атпен белгілі.

Сойердің дуалдылық принципі. Айталық $1 < p < \infty$, және $g(\cdot)$, $v(\cdot)$ - $(0, \infty)$ аралығында өлшенетін теріс емес функциялар. Онда

$$\sup_{0 \le f \downarrow} \frac{\int_0^\infty f(x) g(x\,) dx}{\left(\int_0^\infty f^p(x) v(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}} \approx$$

$$\approx \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x g(t)dt \right)^{p'} \left(\int_0^x v(t)dt \right)^{-p'} v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p'}} + \frac{\int_0^\infty g(x)dx}{\left(\int_0^\infty v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Егер $\int_0^\infty v(x)dx = \infty$ болса, онда оң жақтығы екінші қосынды нөлге тең.

Е. Сойер [54, p.146] жұмыста дуалдылық принципін қолданып $1 < p, q < \infty$ жағдайында барлық теріс емес өспейтін f функциялары үшін (1.2.1) теңсіздігінің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттарын алды. Бұл нәтижені В. Д. Степанов [55] жұмыста $0 < q < 1 < p < \infty$ және $0 < p \le q < \infty$, $0 < p < 1$ жағдайлары үшін кеңейтті. М. Л. Гольдман [1, с.129], Г. Беннетт пен К. Гросс-Эрдманн [56] жұмыстарда $0 < q < p < 1$ жағдайында барлық теріс емес өспейтін f функциялар үшін (1.2.1) теңсіздігі орындалатындай u, v салмақтарының толық сипаттамаларын берді. $0 < p \le 1$ жағдайы үшін дуалдылық принципі [55, p.154], [57] жұмыстарда қарастырылған.

$f \ge 0$ монотонды тізбектер конусындағы келесі түрдегі

$$\left(\sum_{i=1}^\infty u_i \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i f_j \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\sum_{i=1}^\infty v_i\, f_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.2.2)$$

Харди салмақты теңсіздіктерінің негізгі нәтижелері К.Ф.Андерсен мен Г.П. Хейниг [13, p. 843], М.Ш. Браверман, В.Д. Степанов [8, p.283], Р. Ойнаров, С.Х. Шалгынбаева [58], Г. Беннетт пен К. Гросс-Эрдманн [56, p.491], М.Л. Гольдман [1, с.122], [59], [60], С.Х. Шалгынбаева [61] жұмыстарында келтірілген.

1998 жылы Р. Ойнаров пен С.Х. Шалгынбаева [58, с.33] $1 < p, q < \infty$ үшін Сойер дуалдылық принципінің дискретті жағдайын алды. Бұл нәтиже монотонды тізбектер конусындағы Харди теңсіздігін $l_{p,v}$ барлық теріс емес тізбектер кеңістігіндегі қандайда бір теңсіздікке әкеледі.

Теорема 1.2.1. [58, с.35] *Айталық $1 < p, q < \infty$, $(a_{i,j})$ үшбұрышты матрица және $i \geq j \geq 1$ үшін $a_{i,j} \geq 0$, ал $i < j$ үшін $a_{ij} = 0$ болсын. Айталық $V_k = \sum_{i=1}^{k} v_i\,, k \geq 1$ болсын. Егер $V_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} V_k = \infty$ болса, онда теріс емес өспейтін $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_{p,v}$ тізбектер үшін*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i f_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2.3}$$

теңсіздігі, барлық теріс емес $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ тізбектері үшін

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_i \left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} g_i\right)^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \tilde{C} \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{q'} u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{1.2.4}$$

теңсіздігіне эквивалентті және $V_\infty < \infty$ болғанда барлық теріс емес $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ тізбектері үшін

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} g_i\right)^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} g_i\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right)^{-\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \bar{C} \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{q'} u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{1.2.5}$$

теңсіздігіне эквивалентті.

Бұл жерде $V_\infty = \infty$ болғанда $\tilde{C} \approx C$, және $V_\infty < \infty$ болғанда $\bar{C} \approx C$, мұндағы C, $\tilde{C}$, $\bar{C}$ – сәйкесінше (1.2.3), (1.2.4), (1.2.5)-теңсіздіктердегі ең кіші оң тұрақтылар.

Оның үстіне С.Х. Шалғынбаева өзінің [62] диссертациясында p және q параметрлерінің басқа мәндері үшін (1.2.2) теңсіздіктің орындалу критерийін алды.

М.Л. Гольдман монотонды тізбектер жиынында (1.2.2) типті теңсіздіктерді зерттеді және сәйкес нәтижелерді квазимонотонды тізбектер конусында Харди теңсіздіктерін орнату үшін қолданды, мысалы [1, с.125], [59, p.35], [60, p.144] қараңыз.

[61, с.76] еңбегінде С.Х. Шалғынбаева (0.5) шарты бойынша $1 < p \leq q < \infty$ жағдайы үшін монотонды тізбектер конусында (1.2.3) теңсіздігінің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттарын алды.

Теорема 1.2.2. [61,с.77]. *Айталық* $1 < p \leq q < \infty$, *(1.2.3) теңсіздігіндегі* (a_{ij}) *матрицасының элементтері (1.2.6) шартын қанағаттандырсын.* $k \geq 1$ *үшін* $V_k = \sum_{i=1}^{k} v_i$, *ал барлық* $i \geq k \geq 1$ *үшін* $A_{ik} = \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}$ *болсын. Онда барлық өспейтін* $f \geq 0$ *тізбектері үшін (1.2.3) теңсіздігі орындалуы үшін* $\mathcal{H}_0 \equiv max\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3\} < \infty$ *болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$\mathcal{H}_1 = \sup_{s\geq 1} V_s^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{s} A_{i,i}^{q} u_i \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathcal{H}_2 = \sup_{s\geq 1} \left(\sum_{k=1}^{s} k^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=s}^{\infty} a_{i,k}^{q} u_i \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathcal{H}_3 = \sup_{s\geq 1} \left(\sum_{k=1}^{s} A_{si}^{p'} \left(V_i^{-\frac{p'}{p}} - V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=s}^{\infty} u_k \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Бұл жерде, $\mathcal{H}_0 \approx C$, *мұндағы* C *– (1.2.3) теңсіздігіндегі ең кіші оң тұрақты.*

Ж. Таспаганбетованың [63-65] жұмыстарында $(a_{i,j})$ матрицасы $\mathcal{O}_m^{+} \cup \mathcal{O}_m^{-}$, $m \geq 0$ кластарында жатқан кезде $1 < p, q < \infty$ жағдайлары үшін (1.2.3) теңсіздіктің орындалу шарттары қарастырылды.

Монотонды функциялар мен тізбектер жиынындағы теңсіздіктермен көптеген зерттеушілер айналысады, мұны келесі басылымдарда көруге болады [62, с.61], [66], [67-74]. Монотонды функциялар мен тізбектер жиынындағы Харди типтес теңсіздіктердің даму тарихы және нәтижелерінің қысқаша мазмұны мына кітапта келтірілген [12, p.91].

2 МАТРИЦАЛЫҚ ОПЕРАТОРЛАРДЫҢ БІР КЛАСЫНЫҢ ШЕНЕЛГЕНДІГІ

2.1. Есептің қойылымы. $\mathcal{O}_2^+, \mathcal{O}_2^-$ матрицалар кластары

Бұл бөлімде келесі матрицалық операторлардың салмақты $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелгендігі қарастырылады.

$$(A^+f)_i = \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j, \quad i \geq 1, \tag{2.1.1}$$

$$(A^-f)_j = \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} f_i, \quad j \geq 1 \tag{2.1.2}$$

мұндағы $a_{ij} > 0,\ i \geq j \geq 1$. Бұл операторлардың шенелгендігі келесі түрдегі Харди типтес теңсіздіктің орындалуына эквивалентті

$$\|A^{\pm}f\|_{qu} \leq C\, \|f\|_{p,v}, \qquad \forall\, f \in l_{p,v} \tag{2.1.3}$$

мұндағы $C - f$ -тен тәуелсіз тұрақты және $(a_{ij}) - i \geq j \geq 1$ болғанда $a_{i,j} \geq 0$, ал $i < j$ болғанда $a_{i,j} = 0$ болатын үшбұрышты сандық матрица.

Айталық $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ және $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ - теріс емес, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ - оң нақты сандар тізбектері болсын. $l_{p,v} - f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ нақты сандар тізбектері кеңістігі және

$$\|f\|_{p,v} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 < p < \infty.$$

$a_{i,j} = 1,\ i \geq j \geq 1$ болғанда (2.1.1), (2.1.2) операторлары дискретті Харди операторларын береді, онымен көп зерттеушілер айналысып, нәтижелері [5, p.401; 6. p.385; 7, p.149; 8, p.285], [13, p.843] жұмыстарда алынған. Жалпы жағдайда (2.1.1) және (2.1.2) операторларының шенелгендігі кез-келген теріс емес матрицалар үшін әлі ашық есеп болып табылады. Алайда кейбір матрицар кластары үшін (2.1.1), (2.1.2) операторларының шенелгендік критерийлері белгілі [5, p.409; 6, p.394; 7, p.151; 8, p. 283], [13, p.843], [15, c.40; 16, p.845; 17, p.64; 18, p.31; 19, p.8; 20, p.117; 21, p.75; 22, p.728] .

Жоғарыда айтылғандай [19, p.5] жұмыста матрицалық операторлардың $\mathcal{O}_n^{\pm}$, $n \geq 0$ кеңейетін кластары енгізілді және олардың матрицаларына қойылатын шарттар алдыңғы шарттардан әлсіздеу болды. Аталған жұмыста матрицалары осы кластарға жататын (2.1.1), (2.1.2) операторларының $1 < p \leq q < \infty$ жағдайындағы салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде шенелгендігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Ал $1 < q < p < \infty$ жағдайы үшін матрицалары $\mathcal{O}_n^+$, $\mathcal{O}_n^-$, $n \geq 2$ кластарына тиісті болғанда (2.1.1), (2.1.2) операторларының салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде шенелгендігі ашық мәселе күйінде қалды. Алайда, $\mathcal{O}_1^{\pm}$ класына жататын матрицалық оператордың салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде шенелгендігінің $1 < q < p < \infty$ жағдайы үшін алғашқы нәтижелері [20, p.124], [21, p.80] жұмыстарда алынды.

Бұл бөлімде $1 < q < p < \infty$ жағдай үшін матрицалары $\mathcal{O}_2^{\pm}$ кластарына тиісті болғанда (2.1.1), (2.1.2) операторларының $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелгендік критерийлерін қарастырамыз.

$(a_{i,j})$ матрицаларының $\mathcal{O}_1^+$, $\mathcal{O}_1^-$, $\mathcal{O}_2^+$, $\mathcal{O}_2^-$кластарын анықтайық.

Егер $(a_{i,j})$ матрицасы $\mathcal{O}_1^+$ немесе $\mathcal{O}_1^-, \mathcal{O}_2^+$ немесе $\mathcal{O}_2^-$ тиісті болса, онда $(a_{i,j})$ матрицасын сәйкесінше $\left(a_{i,j}^{(1)}\right), \left(a_{i,j}^{(2)}\right)$ деп белгілеміз.

Анықтама 1. *Айталық $(a_{i,j})$ теріс емес және барлық $i \geq j \geq 1$ үшін бірінші индексі бойынша кемімейтін матрица болсын. $(a_{i,j})$ матрицасы $\mathcal{O}_1^+$ класында жатады, егер $r_1 \geq 1$ саны мен теріс емес $(a_{i,j}^{1,0})$ матрицасы табылып, барлық $i \geq k \geq j \geq 1$ үшін келесі бағалау орындалса*

$$\frac{1}{r_1}\left(a_{i,k}^{1,0} + a_{k,j}\right) \leq a_{i,j}^{(1)} \leq r_1\left(a_{i,k}^{1,0} + a_{k,j}\right).$$

Анықтама 2. *Айталық $(a_{i,j})$ теріс емес және барлық $i \geq j \geq 1$ үшін екінші индексі бойынша өспейтін матрица болсын.$(a_{i,j})$ матрицасы $\mathcal{O}_1^-$ класында жатады, егер $\bar{r}_1 \geq 1$ саны мен теріс емес $\left(a_{i,j}^{0,1}\right)$ матрицасы табылып, барлық $i \geq k \geq j \geq 1$ үшін келесі бағалау орындалса*

$$\frac{1}{\bar{r}_1}\left(a_{i,k} + a_{k,j}^{0,1}\right) \leq a_{i,j}^{(1)} \leq \bar{r}_1\left(a_{i,k} + a_{k,j}^{0,1}\right).$$

Анықтама 3. *Айталық, $(a_{i,j})$ теріс емес және барлық $i \geq j \geq 1$ үшін бірінші индексі бойынша кемімейтін матрица болсын. $(a_{i,j})$ матрицасы $\mathcal{O}_2^+$ класына тиісті болады, егер $r_2 \geq 1$ саны мен теріс емес $\left(a_{i,j}^{2,0}\right), \left(a_{i,j}^{2,1}\right), \left(a_{i,j}^{(1)}\right)$ матрицалары табылып, барлық $i \geq k \geq j \geq 1$ үшін келесі теңсіздік орындалса*

$$\frac{1}{r_2}\left(a_{i,k}^{2,0} + a_{i,k}^{2,1}a_{k,j}^{(1)} + a_{k,j}\right) \leq a_{i,j}^{(2)} \leq r_2\left(a_{i,k}^{2,0} + a_{i,k}^{2,1}a_{k,j}^{(1)} + a_{k,j}\right),$$

мұндағы $\left(a_{i,j}^{(1)}\right) \in \mathcal{O}_1^+$.

Анықтама 4. *Айталық,* $(a_{i,j})$ *теріс емес және барлық* $i \geq j \geq 1$ *үшін екінші индексі бойынша өспейтін матрица болсын.* $(a_{i,j})$ *матрицасы* $\mathcal{O}_2^-$ *класына тиісті болады, егер ,* $\bar{r}_2 \geq 1$ *саны мен теріс емес* $\left(a_{i,j}^{2,0}\right), \left(a_{i,j}^{2,1}\right), \left(a_{i,j}^{(1)}\right)$ *матрицалары табылып, барлық* $i \geq k \geq j \geq 1$ *үшін келесі теңсіздік орындалса*

$$\frac{1}{\bar{r}_2}\left(a_{i,k} + a_{i,k}^{(1)} a_{k,j}^{1,2} + a_{k,j}^{0,2}\right) \leq a_{i,j}^{(2)} \leq \bar{r}_2 \left(a_{i,k} + a_{i,k}^{(1)} a_{k,j}^{1,2} + a_{k,j}^{0,2}\right),$$

мұндағы $\left(a_{i,j}^{(1)}\right) \in \mathcal{O}_1^-$.

Ескерту 1. [19, p.3] жұмысында көрсетілгендей $\left(a_{i,j}^{2,0}\right), \left(a_{i,j}^{2,1}\right)$, $\left(a_{i,j}^{0,2}\right), \left(a_{i,j}^{1,2}\right)$ матрицаларын i бойынша кемімейтін және j бойынша өспейтін деп алуға болады.

$\mathcal{O}_1^+, \mathcal{O}_1^-, \mathcal{O}_2^+, \mathcal{O}_2^-$ кластарына жататын матрицаларға мысал келтірейік.

Мысал 1. Айталық $\alpha > 0$, $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ кемімейтін оң тізбек, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ кез-келген оң тізбек және $a_i \geq b_j$, $i \geq j \geq 1$ болсын. Онда $a_{i,j} = a_{i,j}^{(1)} := \left(\ln\frac{a_i}{b_j}\right)^{\alpha} \in \mathcal{O}_1^+$, мұндағы $i \geq j \geq 1$.

Расында да, барлық $i \geq k \geq j \geq 1$ үшін

$$a_{i,j}^{(1)} = \left(\ln\frac{a_i}{a_k}\cdot\frac{a_k}{b_j}\right)^{\alpha} \approx \left(\ln\frac{a_i}{a_k}\right)^{\alpha} + \left(\ln\frac{a_k}{b_j}\right)^{\alpha} = a_{i,k}^{1,0} + a_{k,j}^{(1)},$$

мұндағы $a_{i,k}^{1,0} = \left(\ln\frac{a_i}{a_k}\right)^{\alpha}$.

Мысал 2. Айталық $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ мен $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ алдыңғы мысалдың шарттарын қанағаттандырсын, $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ - теріс емес тізбек болсын. Онда $a_{i,j} = a_{i,j}^{(2)} := \sum_{s=j}^{i} \omega_s \left(\ln\frac{a_s}{b_j}\right)^{\alpha} \in \mathcal{O}_2^+$, $i \geq j \geq 1$.

Расында да, барлық $i \geq k \geq j \geq 1$ үшін

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{s=j}^{i} \omega_s \left(\ln\frac{a_s}{b_j}\right)^{\alpha} \approx \sum_{s=j}^{k} \omega_s \left(\ln\frac{a_s}{b_j}\right)^{\alpha} + \sum_{s=k}^{i} \omega_s \left(\ln\frac{a_s}{b_j}\right)^{\alpha} \approx$$

$$\approx a_{k,j}^{(2)} + \sum_{s=k}^{i} \omega_s \left(\ln\frac{a_s}{a_k}\right)^{\alpha} + \left(\ln\frac{a_k}{b_j}\right)^{\alpha} \sum_{s=k}^{i} \omega_s =$$

$$= a_{i,k}^{2,0} + a_{i,k}^{2,1} a_{k,j}^{(1)} + a_{k,j}^{(2)},$$

мұндағы $a_{k,j}^{(1)} = \left(\ln\frac{a_k}{b_j}\right)^{\alpha} \in \mathcal{O}_1^+$, $a_{i,k}^{2,0} = \sum_{s=k}^{i} \omega_s \left(\ln\frac{a_s}{a_k}\right)^{\alpha}$, $a_{i,k}^{2,1} = \sum_{s=k}^{i} \omega_s$, $i \geq k \geq j \geq 1$.

Мысал 3. Егер $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ - кез-келген оң тізбек, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ - кемімейтін оң тізбек және $a_i \geq b_j$, $i \geq j \geq 1$ болса, онда $a_{i,j}^{(1)} := \left(\ln\frac{a_i}{b_j}\right)^{\alpha} \in \mathcal{O}_1^-$ және $a_{i,j}^{(2)} := \sum_{s=j}^{i} \omega_s \left(\ln\frac{a_s}{b_j}\right)^{\alpha} \in \mathcal{O}_2^-$, $i \geq j \geq 1$ болады.

Лемма А. [40, с.56] *Айталық $\gamma > 0$, $1 \leq n \leq N \leq \infty$ және $\{h_k\}$ теріс емес тізбек болсын. Онда*

$$\left(\sum_{k=n}^{N} h_k\right)^{\gamma} \approx \sum_{k=n}^{N} \left(\sum_{i=n}^{k} h_i\right)^{\gamma-1} h_k, \qquad (2.1.14)$$

$$\left(\sum_{k=n}^{N} h_k\right)^{\gamma} \approx \sum_{k=n}^{N} \left(\sum_{i=k}^{N} h_i\right)^{\gamma-1} h_k. \qquad (2.1.15)$$

2.2. $\mathcal{O}_2^+$, $\mathcal{O}_2^-$ кластарына жататын матрицалық операторлардың салмақты Лебег тізбектер кеңістіктерінде шенелгендік критерийі, $1 < q < p < \infty$ жағдайы

Бұл бөлімшеде A^+ және A^- операторларының матрицалары сәйкес $\mathcal{O}_2^+$, $\mathcal{O}_2^-$ кластарына тиісті болғанда салмақты $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелгендігінің қажетті және жеткілікті шарттары келтіріледі.

Егер $i < 1$ болса, $g_i = 0$ болсын деп ұйғарайық және $\Delta^- g_i = g_i - g_{i-1}$, $\Delta^+ g_i = g_i - g_{i+1}$ болсын.

Теорема 2.2.1. *Айталық $1 < q < p < \infty$ және $(a_{ij}) \in \mathcal{O}_2^+$ болсын. Онда (2.1.1) операторы $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелген болуы үшін $M^+ = max\{M_{2.0}^+, M_{2.1}^+, M_{2.2}^+\} < \infty$ болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$M_{2,0}^+ = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=i}^{\infty} \left(a_{s,i}^{2,0}\right)^q u_s^q\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=1}^{i} v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$M_{2,1}^{+}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=i}^{\infty}\left(a_{s,i}^{2,1}\right)^{q}u_s^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_{i,j}^{(1)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^{+}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_{i,j}^{(1)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$M_{2,2}^{+}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=i}^{\infty}u_s^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_{i,j}^{(2)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^{+}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_{i,j}^{(2)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Сонымен қатар, $\|A^+\|_{p\to q}\approx M^+$, *мұндағы* $\|A^+\|_{p,v\to q,u}$ - A^+ *операторының* $l_{p,v}$ *кеңістігінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне нормасы.*

(2.1.2) операторы үшін сәйкес нәтиже келесідей

Теорема 2.2.2. *Айталық* $1<q<p<\infty$ *және* $(a_{ij})\in\mathcal{O}_2^-$ *болсын. Онда (2.1.2) операторы* $l_{p,v}$ *кеңістігінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне шенелген болуы үшін* $\mathcal{M}^-=max\{\mathcal{M}_{0,2}^-,\mathcal{M}_{1,2}^-,\mathcal{M}_{2,2}^-\}<\infty$ *болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$\mathcal{M}_{0,2}^{-}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{i}\left(a_{i,s}^{0,2}\right)^{q}u_s^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}v_i^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathcal{M}_{1,2}^{-}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{i}\left(a_{i,s}^{1,2}\right)^{q}u_s^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=i}^{\infty}\left(a_{j,i}^{(1)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^{+}\left(\sum_{j=i}^{\infty}\left(a_{j,i}^{(1)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathcal{M}_{2,2}^{-}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{i}u_s^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=i}^{\infty}\left(a_{j,i}^{(2)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^{+}\left(\sum_{j=i}^{\infty}\left(a_{j,i}^{(2)}\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Сонымен қатар, $\|A^-\|_{p\to q}\approx\mathcal{M}^-$, *мұндағы* $\|A^-\|_{pv\to qu}$ - A^- *операторының* $l_{p,v}$ *кеңісінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне нормасы.*

(2.1.1) және (2.1.2) операторларының түйіндестігін пайдаланып 2.2.1 мен 2.2.2 теоремалардан келесі нәтижелерді аламыз.

Теорема 2.2.3. *Айталық* $1 < q < p < \infty$ *және* $(a_{ij}) \in \mathcal{O}_2^+$ *болсын. Онда (2.1.2) операторы* $l_{p,v}$ *кеңістігінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне шенелген болуы үшін* $M^- = max\{M_{2,0}^-, M_{2,1}^-, M_{2,2}^-\} < \infty$ *болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$M_{2,0}^- = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=i}^{\infty} \left(a_{s,i}^{2,0}\right)^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{j=1}^{i} u_j^q \right)^{\frac{q}{p-q}} u_i^q \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$M_{2,1}^- = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=i}^{\infty} \left(a_{s,i}^{2,1}\right)^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{j=1}^{i} \left(a_{i,j}^{(1)}\right)^q u_j^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \Delta^- \left(\sum_{j=1}^{i} \left(a_{i,j}^{(1)}\right)^q u_j^q \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$M_{2,2}^- = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=i}^{\infty} v_s^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{j=1}^{i} \left(a_{i,j}^{(2)}\right)^q u_j^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \Delta^- \left(\sum_{j=1}^{i} \left(a_{i,j}^{(2)}\right)^q u_j^q \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Сонымен қатар, $\|A^-\|_{p\to q} \approx M^-$, *мұндағы* $\|A^-\|_{p,v\to q,u}$ - A^- *операторының* $l_{p,v}$ *кеңістігінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне нормасы.*

Теорема 2.2.4. *Айталық* $1 < q < p < \infty$ *және* $(a_{ij}) \in \mathcal{O}_2^-$ *болсын. Онда (2.1.1) операторы* $l_{p,v}$ *кеңістігінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне шенелген болуы үшін* $\mathcal{M}^+ = max\{\mathcal{M}_{0,2}^+, \mathcal{M}_{1,2}^+, \mathcal{M}_{2,2}^+\} < \infty$ *болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$\mathcal{M}_{0,2}^+ = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{i} \left(a_{i,s}^{2,0}\right)^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=i}^{\infty} u_j^q \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} u_i^q \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathcal{M}_{1,2}^+ = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{i} \left(a_{i,s}^{1,2}\right)^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=i}^{\infty} \left(a_{j,i}^{(1)}\right)^q u_j^q \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \Delta^+ \left(\sum_{j=i}^{\infty} \left(a_{j,i}^{(1)}\right)^q u_j^q \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathcal{M}_{2,2}^{+} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{i} v_s^{-p'} \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=i}^{\infty} \left(a_{j,i}^{(2)} \right)^q u_j^q \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \Delta^{+} \left(\sum_{j=i}^{\infty} \left(a_{j,i}^{(2)} \right)^q u_j^q \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Сонымен қатар, $\|A^{+}\|_{p\to q} \approx \mathcal{M}^{+}$, *мұндағы* $\|A^{+}\|_{p,v\to q,u}$ - A^{+} *операторының* $l_{p,v}$ *кеңістігінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне нормасы.*

Теорема 2.2.1 дәлелдеуі.

Дәлелдеу. **Қажеттілік**. (2.1.1) операторы $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелген болсын, $\|A^{+}\|_{p,v\to q,u} < \infty$, яғни келесі теңсіздік

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j \right)^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|A^{+}\|_{p,v\to q,u} \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^p v_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.2.1)$$

барлық теріс емес $f \in l_{p,v}$ тізбектері үшін, содай-ақ теріс емес финитті $f \in l_{p,v}$ тізбектері үшін орындалады. (2.1.14), анықтама 3-тен шығатын $a_{i,k} \gg a_{i,j}^{2,0}$, $i \geq j \geq k \geq 1$ қатынасты және Абель түрлендіруін пайдаланып келесі өрнектерді аламыз

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j \right)^q u_i^q \approx \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j \left(\sum_{s=1}^{j} a_{i,s} f_s \right)^{q-1} u_i^q \gg$$

$$\gg \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} \left(a_{i,j}^{2,0}\right)^q f_j \left(\sum_{s=1}^{j} f_s \right)^{q-1} u_i^q = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \left(\sum_{s=1}^{j} f_s \right)^{q-1} \sum_{i=j}^{\infty} \left(a_{i,j}^{2,0}\right)^q u_i^q =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \Delta^{-} \left(\sum_{n=1}^{j} f_n \left(\sum_{s=1}^{n} f_s \right)^{q-1} \right) \sum_{i=j}^{\infty} \left(a_{i,j}^{2,0}\right)^q u_i^q =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{j} f_n \left(\sum_{s=1}^{n} f_s \right)^{q-1} \right) \Delta^{+} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \left(a_{i,j}^{2,0}\right)^q u_i^q \right) +$$

$$+ \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} f_n \left(\sum_{s=1}^{n} f_s \right)^{q-1} \right) \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(a_{i,N+1}^{2,0}\right)^q u_i^q \approx$$

$$\approx \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{j} f_s \right)^q \Delta^{+} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \left(a_{i,j}^{2,0}\right)^q u_i^q \right) +$$

$$+\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\left(\sum_{s=1}^{n} f_s\right)^{q-1}\right)\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(a_{i\,,N+1}^{2,0}\right)^q u_i^q\,.$$

f-тің финиттігінен және $a_{i,j}^{2,0}$ - j индексі бойынша өспейтіндігінен

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\left(\sum_{s=1}^{n} f_s\right)^{q-1}\right)\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(a_{i,N+1}^{2,0}\right)^q u_i^q = 0$$

шығады. Олай болса

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j\right)^q u_i^q \gg \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{j} f_s\right)^q \Delta^+\left(\sum_{i=j}^{\infty}\left(a_{i,j}^{2,0}\right)^q u_i^q\right).$$

Осыдан және (2.2.1)-ден келесі қатынас шығады

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{j} f_s\right)^q \Delta^+\left(\sum_{i=j}^{\infty}\left(a_{i,j}^{2,0}\right)^q u_i^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \ll \|A^+\|_{p,v\to q,u}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|f_i v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Онда Теорема 1.1.1. (v) бойынша

$$\infty > \|A^+\|_{p,v\to q,u} \gg$$

$$\gg\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty}\Delta^+\left(\sum_{i=j}^{\infty}\left(a_{i,j}^{2,0}\right)^q u_i^p\right)\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{s=1}^{k} v_s^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} =$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\left(a_{i,j}^{2,0}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{s=1}^{k} v_s^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} = M_{2,0}^+ \qquad (2.2.2)$$

(2.1.3) теңсіздігінің орындалуы үшін барлық теріс емес $g \in l_{q',u^{-1}}$ тізбектер үшін, дербес жағдайда, теріс емес финитті $g \in l_{q',u^{-1}}$ тізбектері үшін келесі дуалды теңсіздіктің орындалуы қажетті және жеткілікті

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \ll \|A^+\|_{p,v\to q,u}\left(\sum_{i=1}^{\infty}(g_iu_i^{-1})^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}. \quad (2.2.3)$$

(2.1.15) формуласын, анықтама 3-тен шығатын $a_{i,j} \ll a_{k,j}$, $k \geq i$ қатынасын және Абель түрлендіруін пайдаланып, келесі өрнектерді аламыз.

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)^{p'}v_j^{-p'} \approx \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\left(\sum_{s=i}^{\infty}a_{s,j}g_s\right)^{p'-1}v_j^{-p'} \gg$$

$$\gg \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}^{p'}g_i\left(\sum_{s=i}^{\infty}g_s\right)^{p'-1}v_j^{-p'} = \sum_{i=1}^{\infty}g_i\left(\sum_{s=i}^{\infty}g_s\right)^{p'-1}\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}^{p'}v_j^{-p'} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\Delta^+\left(\sum_{n=i}^{\infty}g_n\left(\sum_{s=n}^{\infty}g_s\right)^{p'-1}\right)\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}^{p'}v_j^{-p'} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{n=i}^{\infty}g_n\left(\sum_{s=n}^{\infty}g_s\right)^{p'-1}\right)\Delta^-\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}^{p'}v_j^{-p'}\right) +$$

$$+ \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}g_n\left(\sum_{s=n}^{\infty}g_s\right)^{p'-1}\right)\sum_{j=1}^{N}a_{N,j}^{p'}v_j^{-p'} \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=i}^{\infty}g_s\right)^{p'}\Delta^-\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}^{p'}v_j^{-p'}\right) + \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}g_n\left(\sum_{s=n}^{\infty}g_s\right)^{p'-1}\right)\sum_{j=1}^{N}a_{N,j}^{p'}v_j^{-p'}.$$

g–ң финиттігінен келесі теңдік шығады

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}g_n\left(\sum_{s=n}^{\infty}g_s\right)^{p'-1}\right)\sum_{j=1}^{N}a_{N,j}^{p'}v_j^{-p'} = 0.$$

$\Delta^-\left(\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}^{p'}v_j^{-p'}\right) \geq 0$ болғандықтан, $\omega_i := \left(\Delta^-\left(\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}^{p'}v_j^{-p'}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}$ деп алайық. Онда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)^{p'}v_j^{-p'} \gg \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=i}^{\infty}g_s\right)^{p'}\omega_i^{p'}.$$

Осыдан және (2.2.3) формуласынан келесі теңсіздікті аламыз

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=i}^{\infty} g_s\right)^{p'} \omega_i^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \ll \|A^+\|_{p,v\to q,u}\left(\sum_{i=1}^{\infty}(g_i u_i^{-1})^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}. \qquad (2.2.4)$$

(2.2.4) теңсіздігінің дуалды түріне ауысайық, яғни

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{j} f_s\right)^{q} u_j^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \ll \|A^+\|_{p,v\to q,u}\left(\sum_{i=1}^{\infty}(f_i \omega_i^{-1})^{p}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 \le f \in l_{p,v}.$$

Онда Теорема 1.1.1 (v)-ны пайдаланып, келесі өрнекті аламыз

$$\infty > \|A^+\|_{p,v\to q,u} \gg \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{s=1}^{k}\omega_s^{p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\omega_k^{p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}\Delta^-\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_{i,j}^{(2)}\right)^{p'} v_j^{-p'}\right)\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^+\left(\sum_{j=1}^{k} a_{k,j}^{p'} v_j^{-p'}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(a_{i,j}^{(2)}\right)^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^+\left(\sum_{j=1}^{k} a_{k,j}^{p'} v_j^{-p'}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}} =$$

$$= M_{2,2}^{+} \quad (2.2.5)$$

Анықтама 3-тен $a_{i,j} \gg a_{i,k}^{2,1} a_{k,j}^{(1)}$, $i \ge k \ge j \ge 1$ шығады. Онда $i \ge k \ge j \ge 1$ үшін

$$a_{i,j} \gg a_{i,k}^{2,1} a_{k,j}^{(1)} = a_{i,k}^{2,1} a_{k,j}^{(1)} \theta_k, \qquad (2.2.6)$$

орындалады, мұндағы

$$\theta_k = \begin{cases} 1, & j \le k \le i, \\ 0, & k > i, k > j. \end{cases}$$

Айталық $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ теріс емес сандар тізбегі және $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i = 1$ болсын. (2.2.6) екі жағын да φ тізбегіне көбейтіп, $k \in \mathbb{N}$ бойынша қосындыласақ

$$a_{i,j} \gg \sum_{k=j}^{i} a_{i,k}^{2,1} a_{k,j}^{(1)} \varphi_k \tag{2.2.7}$$

болады. Онда (2.2.1)-дің сол жағына (2.2.7) формуласын пайдаланып, қосындылау ретін екі рет алмастырсақ, келесі өрнектерді аламыз

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j\right)^q = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j \left(\sum_{s=1}^{i} a_{i,s} f_s\right)^{q-1} \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \sum_{j=1}^{i} \left(\sum_{k=j}^{i} a_{i,k}^{2,1}\, a_{k,j}^{(1)} \varphi_k\right) f_j \left(\sum_{s=1}^{i} \left(\sum_{\tau=s}^{i} a_{i,\tau}^{2,1}\, a_{\tau,s}^{(1)} \varphi_\tau\right) f_s\right)^{q-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \sum_{k=1}^{i} \varphi_k a_{i,k}^{2,1} \sum_{j=1}^{i} a_{k,j}^{(1)} f_j \left(\sum_{\tau=1}^{i} \varphi_\tau a_{i,\tau}^{2,1} \sum_{s=1}^{\tau} a_{\tau,s}^{(1)} f_s\right)^{q-1} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \left(\sum_{j=1}^{k} a_{k,j}^{(1)} f_j\right) \sum_{i=k}^{\infty} u_i^q a_{i,k}^{2,1} \left(\sum_{\tau=k}^{i} \varphi_\tau a_{i,\tau}^{2,1} \sum_{s=1}^{\tau} a_{\tau,s}^{(1)} f_s\right)^{q-1} \gg$$

$$\gg \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{k,j}^{(1)} f_j\right)^q \sum_{i=k}^{\infty} u_i^q\, a_{i,k}^{2,1} \left(\sum_{\tau=k}^{i} \varphi_\tau\, a_{i,\tau}^{2,1}\right)^{q-1} \varphi_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{k,j}^{(1)} f_j\right)^q h_k, \tag{2.2.8}$$

мұндағы $h_k = \sum_{i=k}^{\infty} u_i^q\, a_{i,k}^{2,1} \left(\sum_{\tau=k}^{i} \varphi_\tau\, a_{i,\tau}^{2,1}\right)^{q-1} \varphi_k$. (2.2.1) мен (2.2.8) формулаларынан келесі теңсіздікті аламыз

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{k,j}^{(1)} f_j\right)^q h_k\right)^{\frac{1}{q}} \ll \|A^+\|_{p,v\to q,u} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (f_i v_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 \leq f \in l_{p,v}.$$

Осыған (2.1.14) формуласын ескере отырып, Теорема 1.1.7-ні қолдансақ

$$\|A^+\|_{p,v\to q,u} \gg B_1 := \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} h_j\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_{k,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} h_k\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

аламыз.

$B_1 < \infty$ екенін және $\sum_{i=1}^{k}\left(a_{k,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}$шаманың k бойынша өспелі болуын ескерсек

$$0 = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=N}^{\infty} h_k\left(\sum_{j=k}^{\infty} h_j\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_{k,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \geq$$

$$\geq \lim_{N\to\infty}\sum_{k=N}^{\infty} h_k\left(\sum_{j=k}^{\infty} h_j\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(a_{N,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}$$

аламыз. Осы қатынасты B_1 шамасына Абель түрлендіруін қолданған кезде ескеріп, (2.1.15) пен келесі түрдегі

$$b^{\gamma} - a^{\gamma} \approx b^{\gamma-1}(b-a), \qquad (2.2.9)$$

элементар эквиваленттікті қолдансақ, мұндағы $b > a > 0,\ \gamma > 0$, онда

$$\|A^+\|_{p,v\to q,u} \gg B_1 \approx$$

$$\approx \left(\sum_{k=1}^{\infty}\Delta^+\left(\sum_{j=k}^{\infty} h_j\left(\sum_{s=j}^{\infty} h_s\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_{k,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} h_j\left(\sum_{s=j}^{\infty} h_s\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)\Delta^-\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_{k,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} \approx$$

$$\approx \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} h_j\right)^{\frac{p}{p-q}}\Delta^-\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_{k,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} h_j \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(a_{k,i}^{(1)} \right)^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \Delta^- \left(\sum_{i=1}^{k} \left(a_{k,i}^{(1)} \right)^{p'} v_i^{-p'} \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

аламыз, мұндағы

$$\sum_{j=k}^{\infty} h_j = \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \, a_{i,j}^{(2,1)} \left(\sum_{\tau=j}^{i} \varphi_\tau \, a_{i,\tau}^{(2,1)} \right)^{q-1} \varphi_j =$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \sum_{j=k}^{i} a_{ij}^{(2,1)} \varphi_j \left(\sum_{\tau=j}^{i} \varphi_\tau \, a_{i,\tau}^{(2,1)} \right)^{q-1} \approx$$

$$\approx \sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=k}^{i} \varphi_j a_{i,j}^{(2.1)} \right)^q .$$

Олай болса $\forall\ \varphi$: $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k = 1$ болатынын ескерсек

$$\|A^+\|_{pv \to qu} \gg$$

$$\gg \sup_{\varphi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=k}^{i} \varphi_j a_{i,j}^{2,1} \right)^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{s=1}^{k} \left(a_{k,s}^{(1)} \right)^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \Delta^- \sum_{s=1}^{k} \left(a_{k,s}^{(1)} \right)^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

екендігі шығады. Айталық $\varphi_j = \ \delta_j(m),\ m \geq 1$, мұндағы

$$\delta_j(m) = \begin{cases} 1, & j = m, \\ 0, & j \neq m. \end{cases}$$

Онда $a_{i,j}^{2,1}$ матрицасының j индексі бойынша өспейтіндігін ескеріп, келесі теңсіздікті аламыз

$$\|A^+\|_{p,v \to q,u} \gg$$

$$\gg \sup_{m \geq 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=k}^{i} a_{i,j}^{2,1} \delta_j(m) \right)^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{s=1}^{k} \left(a_{k,s}^{(1)} \right)^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \Delta^+ \left(\sum_{s=1}^{k} \left(a_{k,s}^{(1)} \right)^{p'} v_s^{-p'} \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}} =$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}u_i^q\left(a_{i,k}^{2,1}\right)^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{s=1}^{k}\left(a_{k,s}^{(1)}\right)^{p'}v_s^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^+\left(\sum_{s=1}^{k}\left(a_{k,s}^{(1)}\right)^{p'}v_s^{-p'}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}}=M_{2,1}^+ \quad (2.2.10)$$

Осылайша (2.2.2), (2.2.5) пен (2.2.10) формулаларынан

$$M^+=max\{M_{2,0}^+,\ M_{2,1}^+,\ M_{2,2}^+\}<<\|A^+\|_{p,v\to q,u}<\infty \qquad (2.2.11)$$

шығады.

Жеткіліктік. Айталық $M^+<\infty$ және $0\le f\in l_{p,v}$ болсын. $\mathbb{Z}$ - бүтін сандар жиыны. Сонымен қатар, $k>n$ үшін $\sum_{i=k}^{n}=0$ болсын, ал $i<j$ үшін $a_{i,j}=0$ болсын.

Барлық $i\ge 1$ үшін келесі бүтін сандар жиынын анықтайық:

$$T_i=\{k\in\mathbb{Z}:(r_2+1)^k\le(A^+f)_i\},$$

мұндағы r_2 анықтама 3-тегі тұрақты және $k_i=max\,T_i$ болсын. Онда

$$(r_2+1)^{k_i}\le(A^+f)_i<(r_2+1)^{k_i+1},\ \forall i\in\mathbb{N}. \qquad (2.2.12)$$

Айталық $m_1=1$ және $M_1=\{i\in\mathbb{N}:\ k_i=k_1=k_{m_1}\}$ болсын. Ал $sup\,M_1+1=m_2$ делік. Әлбетте, $m_2>m_1$ болады және M_1 жиыны жоғарыдан шенелген болса, онда $m_2<\infty$ және $m_2-1=max\,M_1=sup\,M_1$ болады. Сонымен қатар $1=m_1<m_2<\ldots<m_s<\infty,\ s\ge 1$ сандары бар болсын делік, онда m_{s+1} шамасын келесідей анықтаймыз $m_{s+1}=sup\,M_s+1$, мұндағы $M_s=\{i\in\mathbb{N}:\ k_i=k_{m_s}\}$.

Айталық $N_0=\{s\in\mathbb{N}:m_s<\infty\}$. Бұдан кейін $k_{m_s}=n_s,\ s\in N_0$ деп ұйғарамыз. m_s анықтамасынан және (2.2.12) –ден $s\in N_0$ үшін

$$(r_2+1)^{n_s}\le(A^+f)_i<(r_2+1)^{n_s+1},\ m_s\le i\le m_{s+1}-1 \qquad (2.2.13)$$

болатынын және $\mathbb{N}=\bigcup_{s\in N_0}[m_s,m_{s+1}-1]$ аламыз, мұндағы $[m_s,m_{s+1})\cap[m_l,m_{l+1})\ne 0$.

(2.2.13) формуласын, 3-ші анықтамадан және $n_{s-2}<n_{s-1}<n_s$ теңсіздігінен шығатын $n_{s-2}+1\le n_s-1$ теңсіздігін пайдаланып, $(r_2+1)^{n_s-1}$ шамасын бағалаймыз:

$$(r_2+1)^{n_s-1}=(r_2+1)^{n_s}-r_2(r_2+1)^{n_s-1}\le(r_2+1)^{n_s}-r_2(r_2+1)^{n_{s-2}+1}\le$$

$$\le(A^+f)_{m_s}-r_2(A^+f)_{m_{s-1}-1}=\sum_{i=1}^{m_s}a_{m_s,i}f_i-r_2\sum_{i=1}^{m_{s-1}-1}a_{m_{s-1},i}f_i=$$

$$= \sum_{i=m_{s-1}}^{m_s} a_{m_s,i} f_i + \sum_{i=1}^{m_{s-1}-1} \left[a_{m_s,i} - r_2 a_{m_{s-1}-1,i}\right] f_i <<$$

$$<< \sum_{i=m_{s-1}}^{m_s} a_{m_s,i} f_i + \sum_{i=1}^{m_{s-1}-1} \left[r_2 a_{m_s,m_{s-1}-1}^{2,0} + r_2 a_{m_s,m_{s-1}-1}^{2,1} a_{m_{s-1}-1,i}^{(1)}\right] f_i <<$$

$$<< \sum_{i=m_{s-1}}^{m_s} a_{m_s,i} f_i + r_2 a_{m_s,m_{s-1}-1}^{2,0} \sum_{i=1}^{m_{s-1}-1} f_i + r_2 a_{m_s,m_{s-1}-1}^{2,1} \sum_{i=1}^{m_{s-1}-1} a_{m_{s-1}-1,i}^{(1)} f_i. \tag{2.2.14}$$

Онда (2.2.14) формуласын ескерсек

$$\|A^+ f\|_q^q = \sum_{s\in N_0} \sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1} u_i^q \, (A^+ f)_i^q < \sum_{s\in N_0} (r_2+1)^{(n_s+1)q} \sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1} u_i^q \leq$$

$$\leq (r_2+1)^{2q} \sum_{s\in N_0} \left(\sum_{i=m_{s-1}}^{m_s} a_{m_s,i} f_i + \right.$$

$$\left. + r_2 a_{m_s,m_{s-1}-1}^{2,0} \sum_{i=1}^{m_{s-1}-1} f_i + r_2 a_{m_s,m_{s-1}-1}^{2,1} \sum_{i=1}^{m_{s-1}-1} a_{m_{s-1}-1,i}^{(1)} f_i \right)^q \sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1} u_i^q \ll$$

$$<< \sum_{s\in N_0} \left(\sum_{i=m_{s-1}}^{m_s} a_{m_s,i} f_i \right)^q \sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1} u_i^q + \sum_{s\in N_0} \left(a_{m_s,m_{s-1}-1}^{2,0}\right)^q \left(\sum_{i=1}^{m_{s-1}-1} f_i \right)^q \sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1} u_i^q +$$

$$+ \sum_{s\in N_0} \left(a_{m_s,m_{s-1}-1}^{2,1}\right)^q \left(\sum_{i=1}^{m_{s-1}-1} a_{m_{s-1}-1,i} f_i \right)^q \sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1} u_i^q =$$

$$= S_{2,2} + S_{2,0} + S_{2,1} \tag{2.2.15}$$

болады.

Гельдер теңсіздігін екі рет және (2.1.15) формуланы пайдаланып, $S_{2,2}$ шамасын бағалайық.

$$S_{2,2} = \sum_{s\in N_0} \left(\sum_{i=m_{s-1}}^{m_s} a_{m_s,i} f_i v_i v_i^{-1} \right)^q \sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1} u_i^q \leq$$

$$\leq \sum_{s\in N_0} \left(\sum_{i=m_{s-1}}^{m_s} (f_i v_i)^p \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{i=m_{s-1}}^{m_s} \left(a_{m_s,i}\right)^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1} u_i^q \leq$$

$$\le \left(\sum_{s\in N_0}\sum_{i=m_{s-1}}^{m_s}(f_i v_i)^p\right)^{\frac{q}{p}}\left(\sum_{s\in N_0}\left(\sum_{i=m_{s-1}}^{m_s}\left(a_{m_s,i}\right)^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1}u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} \le$$

$$\le 2^{\frac{q}{p}}\|f\|_{l_{pv}}^q\left(\sum_{s\in N_0}\left(\sum_{i=m_{s-1}}^{m_s}\left(a_{m_s,i}\right)^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1}u_i^q\left(\sum_{j=i}^{m_{s+1}-1}u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} \le$$

$$\le \|f\|_{l_{pv}}^q\left(\sum_{i=1}^{\infty}u_i^q\left(\sum_{j=i}^{\infty}u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{n=1}^{i}\left(a_{i,n}\right)^{p'}v_n^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} = \|f\|_{l_{pv}}^q\widetilde{M}_{2,2}^q,$$

мұндағы

$$\widetilde{M}_{2,2}^{\frac{pq}{p-q}} = \sum_{i=1}^{\infty}u_i^q\left(\sum_{j=i}^{\infty}u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{n=1}^{i}\left(a_{i,n}\right)^{p'}v_n^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}.$$

Алынған өрнекке Абель түрлендіруін, (2.1.15) және (2.2.9) формулаларын қолданып, келесі өрнекті аламыз

$$\widetilde{M}_{2,2}^{\frac{pq}{p-q}} = \sum_{i=1}^{\infty}\Delta^+\left(\sum_{k=i}^{\infty}u_k^q\left(\sum_{j=k}^{\infty}u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)\left(\sum_{n=1}^{i}\left(a_{i,n}\right)^{p'}v_n^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=i}^{\infty}u_k^q\left(\sum_{j=k}^{\infty}u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)\Delta^-\left(\sum_{n=1}^{i}\left(a_{i,n}\right)^{p'}v_n^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=i}^{\infty}u_k^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{n=1}^{i}\left(a_{i,j}^{(2)}\right)^{p'}v_n^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^-\left(\sum_{n=1}^{i}\left(a_{i,n}\right)^{p'}v_n^{-p'}\right) = M_{2,2}^+ < \infty.$$

Сондықтан

$$S_{2,2} << \left(M_{2,2}^+\right)^q\|f\|_{l_{pv}}^q. \qquad (2.2.15)$$

$S_{2,0}$ шамасын бағалау үшін

$$\eta_i(m_{s-1}-1)=\begin{cases}\sum\limits_{s\in N_0}\left(a^{2,0}_{m_s,m_{s-1}-1}\right)^q\sum\limits_{i=m_s}^{m_{s+1}-1}u_i^q, & i=m_{s-1}-1,\\ 0, & i\neq m_{s-1}-1,\end{cases}$$

деп алып, Теорема 1.1.1.(v) қолданамыз.

$$S_{2,0}=\sum_{s\in N_0}\left(a^{2,0}_{m_s,m_{s-1}-1}\right)^q\left(\sum_{i=1}^{m_{s+1}-1}f_i\right)^q\sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1}u_i^q=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}f_i\right)^q\eta_n<<$$

$$<<\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\eta_j\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{n}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}v_n^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{p}}\|f\|^q_{l_{pv}}\qquad(2.2.16)$$

$\sum_{i=n}^{\infty}\eta_i$ шамасын бағалау үшін Ескерту 1-ді қолданамыз:

$$\sum_{i=n}^{\infty}\eta_i=\sum_{s:m_{s-1}-1\geq n}\left(a^{2,0}_{m_s,m_{s-1}-1}\right)^q\sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1}u_i^q=$$

$$=\sum_{s:m_{s-1}-1\geq n}\sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1}\left(a^{2,0}_{m_s,m_{s-1}-1}\right)^q u_i^q<<\sum_{i=n}^{\infty}\left(a^{2,0}_{in}\right)^q u_i^q.$$

Осыдан және (2.2.16) формуладан келесі өрнек шығады

$$S_{2,0}\ll\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\left(a^{2,0}_{i,n}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{n}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}v_n^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}}\|f\|^q_{l_{pv}}=$$

$$=\left(M^+_{2,0}\right)^q\|f\|^q_{l_{p,v}}\qquad(2.2.17)$$

Енді Теорема 1.1.7-ні пайдаланып $S_{2,1}$ шамасын бағалаймыз

$$S_{2,1}=\sum_{s\in N_0}\left(a^{2,1}_{m_s,m_{s-1}-1}\right)^q\left(\sum_{i=1}^{m_{s-1}-1}a^{(1)}_{m_{s-1}-1,i}f_i\right)^q\sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1}u_i^q<<$$

$$<< \sum_{s\in N_0}\left(\sum_{i=1}^{m_{s-1}-1} a^{(1)}_{m_{s-1}-1,i} f_i\right)^q \sum_{i=m_s}^{m_{s+1}-1}\left(a^{2,1}_{i,m_{s-1}-1}\right)^q u_i^q =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a^{(1)}_{k,i} f_i\right)^q \theta_k \le \left(\max\{\tilde{B}_0,\tilde{B}_1\}\right)^q \|f\|^q_{l_{p,v}}, \qquad (2.2.18)$$

мұндағы

$$\theta_k = \begin{cases} \sum_{s\in N_0}\sum_{n=m_s}^{m_{s+1}-1}\left(a_{n,m_{s-1}-1}\right)^q u_n^q, & k = m_{s-1}-1, \\ 0, & k \ne m_{s-1}-1. \end{cases}$$

$$\tilde{B}_0 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty}\left(a^{1,0}_{j,k}\right)^q \theta_j\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\tilde{B}_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty}\theta_j\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a^{(1)}_{k,i}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \theta_k\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Енді $\tilde{B}_0$ шамасындағы $\sum_{j=k}^{\infty}\left(a^{1,0}_{j,k}\right)^q\theta_j$ өрнегін бағалайық:

$$\sum_{j=k}^{\infty}\left(a^{1,0}_{j,k}\right)^q \theta_j = \sum_{s:m_{s-1}-1\ge k}\left(a^{1,0}_{m_{s-1}-1,k}\right)^q \sum_{n=m_s}^{m_{s+1}-1}\left(a^{2,1}_{n,m_{s-1}-1}\right)^q u_n^q =$$

$$= \sum_{s:m_{s-1}-1\ge k}\sum_{n=m_s}^{m_{s+1}-1}\left(a^{2,1}_{n,m_{s-1}-1}\right)^q\left(a^{1,0}_{m_{s-1}-1,k}\right)^q u_n^q.$$

[19, p.4] жұмысында $n \ge m_{s-1}-1 \ge k \ge 1$ болғанда $a^{2,1}_{n,m_{s-1}-1} a^{1,0}_{m_{s-1}-1,k} <<$ $\ll a^{2,0}_{n,k}$ екені көрсетілген. Онда

$$\sum_{j=k}^{\infty}\left(a^{1,0}_{j,k}\right)^q \theta_j << \sum_{n=k}^{\infty}\left(a^{2,0}_{n,k}\right)^q u_n^q.$$

Осылайша

$$\tilde{B}_0 << \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\left(a_{n,k}^{2,0}\right)^q u_n^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p\prime}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p\prime}\right)^{\frac{p-q}{pq}} = M_{2,0}^{+} < \infty. \quad (2.2.19)$$

Абель түрлендіруін, (2.1.15) және (2.2.9) формулаларын пайдаланып, $\tilde{B}_1$ шамасын бағалайық.

$$\tilde{B}_1^{\frac{pq}{p-q}} = \sum_{k=1}^{\infty}\Delta^{+}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\theta_i\left(\sum_{j=i}^{\infty}\theta_j\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_{k,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\theta_i\left(\sum_{j=i}^{\infty}\theta_j\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)\Delta^{-}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_{k,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\theta_i\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_{k,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^{-}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_{k,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right). \quad (2.2.20)$$

$$\sum_{i=k}^{\infty}\theta_i = \sum_{s:m_{s-1}-1\ge k}\ \sum_{n=m_s}^{m_{s+1}-1}\left(a_{n,m_{s-1}-1}^{2,1}\right)^q u_n^q \le \sum_{n=k}^{\infty}\left(a_{n,k}^{2,1}\right)^q u_n^q$$

болғандықтан және (2.2.20) формуласынан келесі бағалауды аламыз

$$\tilde{B}_1 \ll \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\left(a_{n,k}^{2,1}\right)^q u_n^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_{k,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\Delta^{-}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_{k,i}^{(1)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}} =$$

$$= M_{2,1}^{+}. \quad (2.2.21)$$

Сонымен (2.2.18), (2.2.19) бен (2.2.21) формулаларынан келесі теңсіздікті аламыз

$$S_{2,1} << \left(max\{M_{2,0}^{+}, M_{2,1}^{+}\}\right)^q \|f\|_{l_{p,v}}^q.$$

Бұдан және (2.2.14), (2.2.15), (2.2.17) формулаларынан

$$\|A^{+}f\|_{q,u} << max\{M_{2,0}^{+}, M_{2,1}^{+}, M_{2,2}^{+}\}\|f\|_{l_{pv}} = M^{+}\|f\|_{l_{p,v}},$$

болады, яғни A^{+}операторы $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелген және $\|A^{+}\|_{p,v\to q,u} << M^{+}$аламыз, ал бұл (2.2.11) формуласымен бірге $\|A^{+}\|_{p,v\to q,u} \approx M^{+}$ береді.
Теорема дәлелденді.

3. ҚОСЫНДЫЛАУ ШЕКТЕРІ АЙНЫМАЛЫ БОЛАТЫН МАТРИЦАЛЫҚ ОПЕРАТОРЛАРДЫҢ САЛМАҚТЫ БАҒАЛАУЛАРЫ

3.1. Қосындылау шектері айнымалы болатын матрицалық операторлар бір класының салмақты Лебег тізбектер кеңістіктерінде шенелгендігі

Айталық $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ -теріс емес, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$- оң нақты сандар тізбектері болсын. $\forall n \in \mathbb{N}$ үшін $K_n := \{k \in \mathbb{N}: k \leq n,\ \alpha(n) \leq \beta(k)\}$ жиынын қарастырайық, мұндағы $\alpha(n)$, $\beta(n)$ — натурал сандар тізбектері, сонымен қатар:

i) $\alpha(n), \beta(n)$ — қатаң өспелі тізбектер;

ii) $\alpha(n) = \beta(n) = 1$ және $n \geq 2$ болғанда $\alpha(n) < \beta(n)$.

Бұл шарттардан $n \geq 2$ үшін $n \leq \alpha(n) < \beta(n)$ шығады.

Бұл бөлімде $1 < p \leq q < \infty$ жағдайы үшін қосындылау шектері айнымалы болатын $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне әсер ететін келесі түрде анықталған матрицалық оператордың шенелімділік қасиеті қарастырылады

$$(Af)_n = \sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)} a_{n,k} f_k, \quad n \geq 1, \tag{3.1.1}$$

мұндағы $(a_{n,k})$ — A операторының теріс емес матрицасы және оның элементтері келесі жалпыланған дискретті «Ойнаров шартын» қанағаттандырады: *$d \geq 1$ саны, $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ оң сандар тізбегі, теріс емес $(b_{i,j})$ матрицасы табылып, барлық k, m: $k \in K_n$, $\alpha(n) \leq m \leq \beta(k)$ үшін келесі теңсіздік орындалсын*

$$\frac{1}{d}\left(b_{n,k}\omega_m + a_{k,m}\right) \leq a_{n,m} \leq d\left(b_{n,k}\omega_m + a_{k,m}\right). \tag{3.1.2}$$

Бұл сұрақтың үзіліссіз операторлар үшін аналогын мына жұмыстардан көруге болады [32, c.300], [35, p.451], [38, c.1316], [75], [76].

$(a_{n,k}) = 1$ болғанда (3.1.1) операторы келесі түрде берілген қосындылау шектері айнымалы болатын дискретті Харди типтес операторын береді

$$(Hf)_n = \sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)} f_k, \ n \geq 1. \tag{3.1.3}$$

Оның $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелгендігі [39, c.56], [40, c.10] жұмыстарда қарастырылған.

$\alpha(n) = 1$, $\beta(n) = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ болғанда (3.1.3)-тен дискретті Харди операторын аламыз, ол [7, p.150], [8, p.283], [13, p.843] жұмыстарда толығымен зерттелген. Дискретті және үзіліссіз Харди теңсіздіктерінің жалпыламалары туралы ақпаратты әртүрлі оқулықтардан алуға болады, мысалы [10, p75; 11, p.11; 12, p.73]. Сонымен қатар $\forall\, n \in N$ үшін $\alpha(n) = 1$, $\beta(n) = n$, болған жағдайда [15, c.40], [21, p.75], [44, c.119] жұмыстарда $\left(a_{n,k}\right)$ матрица элементтері әртүрлі шарттарды қанағаттандырған кезде (3.1.1) матрицалық операторының шенелгендігінің қажетті және жеткілікті шарттары қарастырылды.

Айта кетейік, (3.1.2)–ден барлық k, m: $k \in K_n$, $\alpha(n) \le m \le \beta(k)$ үшін келесі теңсіздіктер шығады

$$a_{k,m} \le d a_{n,m}, \tag{3.1.4}$$

$$b_{n,k}\omega_m \le d a_{n,m}. \tag{3.1.5}$$

(3.1.2) шартын қанағаттандыратын матрицаларға мысал келтірейік.

Мысал 1. Айталық $\alpha > 0$ және $a_{n,s} \coloneqq (a_n - g_s)^\alpha \ge 0$, $n \ge s \ge 1$ болсын, мұндағы $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – кемімейтін теріс емес сандар тізбегі, ал $\{g_s\}_{s=1}^{\infty}$ кез-келген теріс емес сандар тізбегі болсын.

Айталық k, m: $k \in K_n$, $\alpha(n) \le m \le \beta(k)$ болсын, онда $\beta(k) \le \beta(n)$ қатынасын ескере отырып, $\beta^{-1}(m) \le k \le n$ аламыз.

$n \ge \beta^{-1}(m) \ge 1$ үшін

$$a_{n,m} \coloneqq \left(a_n - g_{\beta^{-1}(m)}\right)^\alpha \ge 0$$

болады. Олай болса, барлық k, m: $k \in K_n$, $\alpha(n) \le m \le \beta(k)$ үшін

$$a_{n,m} \coloneqq \left(a_n - g_{\beta^{-1}(m)}\right)^\alpha \approx (a_n - a_k)^\alpha + \left(a_k - g_{\beta^{-1}(m)}\right)^\alpha = b_{n,k} + a_{k,m}$$

орындалады, яғни $\left(a_{n,m}\right)$ матрицасы (3.1.2) шартын қанағаттандырады. Бұл жерде $\{\omega_m\}_{m=1}^{\infty} \equiv 1$.

Енді негізгі нәтижемізге көшейік.

Айталық $s \in \mathbb{N}$ болсын. $\Omega(s) := \{n \in \mathbb{N}: \alpha(n) \le s\}$ делік. Ең болмағанда $1 \in \Omega(s)$ болғандықтан $\Omega(s) \ne \emptyset$ болады. Барлық $s \in \mathbb{N}$ үшін $\alpha^{-1}(s) := max\, \Omega\,(s)$ болсын.Онда,

$$\alpha^{-1}\left(\alpha(s)\right) = s,\ \alpha\left(\alpha^{-1}(s)\right) \le s.$$

Айталық $m \in \mathbb{N}$ болсын. $\alpha(n), \beta(n)$ сандар тізбектеріне қойылған шарттардан $\Omega_1 := \left\{s \in \mathbb{N}:\ m \le s \le \alpha^{-1}\left(\beta(m)\right)\right\} \ne \emptyset$ шығады, себебі $m \in \Omega_1$.

Негізгі нәтижені келтірейік.

Теорема 3.1.1. *Айталық* $1 < p \leq q < \infty$ *болсын.* $(a_{n,k})$ *матрицасының элементтері (3.1.2) шартын қанағаттандырсын. Онда (3.1.1) операторы* $l_{p,v}$ *кеңістігінен* $l_{q,u}$ *кеңістігіне шенелген болуы үшін* $F = F_1 + F_2 < \infty$ *болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$F_1 = \sup_{m\geq 1} \sup_{m\leq s\leq \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{m,k}^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$F_2 = \sup_{m\geq 1} \sup_{m\leq s\leq \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q b_{n,m}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} \omega_k^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Сонымен қатар, $\|A\|_{l_{pv}\to l_{qu}} \approx F$.

Дәлелдеу. Қажеттілік. Айталық (3.1.1) операторы $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелген болсын, онда келесі теңсіздік орындалады

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)} a_{n,k} f_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|A\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p v_n^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \geq 0, \tag{3.1.6}$$

мұнда және одан кейін $\|A\| \equiv \|A\|_{l_{p,v}\to l_{q,u}}$ деп аламыз.

Айталық $m \in \mathbb{N}$ және $m \leq s \leq \alpha^{-1}(\beta(m))$ болсын. Келесі түрдегі тексеру тізбегін алайық $\bar{f}_i = \chi_{[\alpha(s),\beta(m)]}(i) a_{m,i}^{p'-1} v_i^{-p'}$ мұндағы

$$\chi_{[\alpha(s),\beta(m)]}(i) = \begin{cases} 1, \ i \in [\alpha(s), \beta(m)]; \\ 0, i \notin [\alpha(s), \beta(m)]. \end{cases}$$

Тексеру тізбегін (3.1.6) формуласының оң жағына қоямыз

$$\|\bar{f}\|_{pv} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}_i^p v_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{m,i}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.1.7}$$

Тексеру тізбегін (3.1.6) теңсіздігінің сол жағына қойып, (3.1.4) пайдаланып келесі өрнекті аламыз

$$\left\|A\bar{f}\right\|_{qu}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n^q\left(\sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)}a_{n,k}\bar{f}_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\geq\left(\sum_{n=m}^{s}u_n^q\left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)}a_{n,k}a_{m,k}^{p'-1}v_k^{-p'}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\geq$$

$$\geq\frac{1}{d}\left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)}a_{m,k}^{p'}v_k^{-p'}\right)\left(\sum_{n=m}^{s}u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.1.8}$$

(3.1.6), (3.1.7) мен (3.1.8) формулаларынан келесі өрнекті аламыз

$$\left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)}a_{m,k}^{p'}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{n=m}^{s}u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}<<\|A\|,\ \ \forall\, m,s\geq 1:\ \ m\leq s\leq\alpha^{-1}\big(\beta(m)\big)\ .$$

Олай болса

$$F_1<<\|A\|<\infty\,. \tag{3.1.9}$$

Енді тексеру тізбегін $\tilde{f}_i=\chi_{[\alpha(s),\beta(m)]}(i)\omega_i^{p'-1}v_i^{-p'}$ деп алайық та, (3.1.6) теңсіздігіне қолданайық. Онда (3.1.6) теңсіздігінің оң жағы үшін келесі теңдік орындалады

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{pv}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{f}_i^p v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=\alpha(s)}^{\beta(m)}\omega_i^{p'}\,v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.1.10}$$

Сол сияқты (3.1.6) теңсіздіктің сол жағына $\tilde{f}$ тізбегін қойсақ, және (3.1.5) пайдалансақ, онда

$$\left\|A\tilde{f}\right\|_{qu}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n^q\left(\sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)}a_{n,k}\,\tilde{f}_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\geq\left(\sum_{n=m}^{s}u_n^q\left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)}a_{n,k}\omega_k^{p'-1}v_k^{-p'}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\geq$$

$$\geq\frac{1}{d}\left(\sum_{n=m}^{s}u_n^q\,b_{n,m}^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)}\omega_k^{p'}v_k^{-p'}\right) \tag{3.1.11}$$

аламыз.

$m,s\geq 1$ — кез - келген және $m\leq s\leq\alpha^{-1}\big(\beta(m)\big)$ болғандықтан, (3.1.6), (3.1.10) мен (3.1.11) формулаларынан келесі теңсіздік шығады

$$F_2 << \|A\| < \infty. \qquad (3.1.12)$$

(3.1.9), (3.1.12) формулалардан $F << \|A\| < \infty$ шығады.

Жеткіліктік. Айталық $F < \infty$ және $0 \leq f \in l_{p,v}$ болсын. (3.1.1) операторының шенелгендігін дәлелдеу үшін блок-диагональ әдісінің дискретті жағдайын қарастырайық ([40, с.8] қараңыз). Бұл әдістің үзіліссіз аналогы Батуев-Степановтың блок-диагональ әдісі деп аталады [77]. Берілген $\alpha(n)$, $\beta(n)$ тізбектері үшін $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ мен $\{n_k'\}_{k\in\mathbb{N}}$ натурал сандар тізбектерін келесі түрде таңдайық: $n_1 = 1$, $n_k' = \alpha^{-1}\big(\beta(n_k)\big)$ және $n_k' + 1 = n_{k+1}$, $k \geq 1$.
Көрініп тұрғандай $n_k' = 1$ және

$$\alpha(n_k') = \alpha\left(\alpha^{-1}\big(\beta(n_k)\big)\right) \leq \beta(n_k) < \alpha(n_{k+1}) \qquad (3.1.13)$$

Осылайша $\mathbb{N}$ жиынын $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ және $\{n_k'\}_{k\in\mathbb{N}}$ тізбектеріне бөле отырып, $\mathbb{N} = \bigcup_{k\geq 1}[n_k, n_k']$ аламыз, онда

$$\|Af\|_{qu}^q = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{i=\alpha(n)}^{\beta(n)} a_{n,i} f_i\right)^q = \sum_k \sum_{n=n_k}^{n_k'} u_n^q \left(\sum_{i=\alpha(n)}^{\beta(n)} a_{n,i}\, f_i\right)^q \approx$$

($\alpha(n_k) \leq \alpha(n) \leq \alpha(n_k') \leq \beta(n_k)$ қатынастыран қолданамыз)

$$\approx \sum_k \sum_{n=n_k}^{n_k'} u_n^q \left(\sum_{i=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} a_{n,i}\, f_i + \sum_{i=\beta(n_k)}^{\beta(n)} a_{n,i}\, f_i\right)^q \approx$$

$$\approx \sum_k \sum_{n=n_k}^{n_k'} u_n^q \left(\sum_{i=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} a_{n,i}\, f_i\right)^q + \sum_k \sum_{n=n_k}^{n_k'} u_n^q \left(\sum_{i=\beta(n_k)}^{\beta(n)} a_{n,i}\, f_i\right)^q =$$

$$= \sum_k \sum_{n=n_k}^{n_k'} u_n^q\, (T_k f)_k^q + \sum_k \sum_{n=n_k}^{n_k'} u_n^q\, (S_k f)_k^q =$$

$$= \sum_k \|T_k f\|_{l_{q,u}[n_k, n_k']}^q + \sum_k \|S_k f\|_{l_{q,u}[n_k, n_k']}^q \leq$$

$$\leq \sum_k \|T_k\|^q\, \|f\|_{l_{p,v}[\alpha(n_k), \beta(n_k)]}^q + \sum_k \|S_k\|^q\, \|f\|_{l_{p,v}[\beta(n_k), \beta(n_k')]}^q \leq$$

$$\leq \left(\sup_k \|T_k\| + \sup_k \|S_k\|\right)^q \|f\|_{p,v}^q.$$

Онда

$$\|A\|_{l_{p,v}\to l_{q,u}} << \left(\sup_k\|T_k\| + \sup_k\|S_k\|\right). \qquad (3.1.14)$$

Сонымен A операторының шенелгендігін дәлелдеу үшін T_k мен S_k операторларының шенелгендігін дәлелдеу керек.

Алдымен T_k операторын қарастырайық.

$1 \le n_k \le n \le n'_k$ және $\alpha(n) \le i \le \beta(n_k)$ үшін $a_{n,i} \approx b_{n,n_k}\omega_i + a_{n_k,i}$ эквиваленттігін ескерсек

$$(T_kf)_n = \sum_{i=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} a_{n,i}\, f_i \approx \sum_{i=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} \left(b_{n,n_k}\omega_i + a_{n_k,i}\right) f_i =$$

$$= b_{n,n_k}\sum_{i=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} \omega_i f_i + \sum_{i=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} a_{n_k,i} f_i = \left(T_{k,1}f\right)_n + \left(T_{k,2}f\right)_n$$

және

$$\|T_kf\|_{l_{q,u}[n_k,n'_k]} \approx \left\|T_{k,1}f\right\|_{l_{q,u}[n_k,n'_k]} + \left\|T_{k,2}f\right\|_{l_{q,u}[n_k,n'_k]} \qquad (3.1.15)$$

аламыз.

(3.1.15)-тен $\|T_k\| \le \left\|T_{k,1}\right\| + \left\|T_{k,2}\right\|$ теңсіздігін аламыз, мұндағы $\left\|T_{k,i}\right\|$ дегеніміз $T_{k,i}\colon l_{p,v}[\alpha(n_k),\beta(n_k)] \to l_{q,u}[n_k,n'_k]$, $i = 1,\ 2$ операторының нормасы.

$\left\|T_{k,1}\right\|$, $\left\|T_{k,2}\right\|$ шамалары сәйкес келесі теңсіздіктердің ең кіші тұрақтылары болып табылады

$$\left(\sum_{n=n_k}^{n'_k} b_{n,n_k}^q u_n^q \left(\sum_{i=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} \omega_i f_i\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left\|T_{k,1}\right\| \left(\sum_{i=\alpha(n_k)}^{\beta(n_k)} (v_i f_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (3.1.16)$$

$$\left(\sum_{n=n_k}^{n'_k} u_n^q \left(\sum_{i=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} a_{n_k,i} f_i\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left\|T_{k,1}\right\| \left(\sum_{i=\alpha(n_k)}^{\beta(n_k)} (v_i f_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.1.17)$$

Айталық

$$\varphi_i = \begin{cases} 1, & i \in [n_k, n'_k]; \\ 0, & i \notin [n_k, n'_k]. \end{cases} \text{ және } d_i = \begin{cases} 1, & i \in [\alpha(n_k), \beta(\, n'_k)]; \\ 0, & i \notin [\alpha(n_k), \beta(\, n'_k)]. \end{cases}$$

болсын.

Келесі түрдегі теңсіздікті қарастырайық

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,n_k}^q u_n^q \varphi_n^q \left(\sum_{i=\alpha(n)}^{\infty} d_i \omega_i f_i\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{i=1}^{\infty} (v_i f_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.1.18)$$

Егер (3.1.18) теңсіздігі C тұрақтысымен орнындалса, онда (3.1.16) теңсіздігі $\left\|T_{k,1}\right\| \leq C$ бағалауымен орындалады. (3.1.18) теңсіздігі төменгі шегі айнымалы болатын Харди теңсіздігі болғандықтан Теорема 1 [40, с.6] және (3.1.13) формуласын ескерсек, келесі бағалау аламыз

$$\left\|T_{k,1}\right\| << \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j^q u_j^q b_{j,n_k}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=\alpha(n)}^{\infty} d_j^{p'} \omega_j^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \sup_{n_k\leq n\leq \alpha^{-1}(\beta(n_k))}\left(\sum_{j=n_k}^{n} u_j^q b_{j,n_k}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} \omega_j^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Сол сияқты (3.1.17) үшін

$$\left\|T_{k,2}\right\| << \sup_{n_k\leq n\leq \alpha^{-1}(\beta(n_k))}\left(\sum_{j=n_k}^{n} u_j^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} a_{n_k,j}^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Онда (3.1.15) формуласынан

$$\left\|T_k\right\| << \sup_{n_k\leq n\leq \alpha^{-1}(\beta(n_k))}\left(\sum_{j=n_k}^{n} u_j^q b_{j,n_k}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} \omega_j^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \sup_{n_k\leq n\leq \alpha^{-1}(\beta(n_k))}\left(\sum_{j=n_k}^{n} u_j^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} a_{n_k,j}^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Осыдан,

$$\sup_{k\geq 1}\left\|T_k\right\| << \sup_{k\geq 1}\sup_{n_k\leq n\leq \alpha^{-1}(\beta(n_k))}\left(\sum_{j=n_k}^{n} u_j^q b_{j,n_k}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} \omega_j^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+\sup_{k\geq 1}\sup_{n_k\leq n\leq \alpha^{-1}(\beta(n_k))}\left(\sum_{j=n_k}^{n} u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=\alpha(n)}^{\beta(n_k)} a_{n_k,j}^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq \sup_{m\geq 1}\sup_{m\leq n\leq \alpha^{-1}(\beta(m))}\left(\sum_{j=m}^{n} u_j^q b_{j,m}^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=\alpha(n)}^{\beta(m)} \omega_j^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+\sup_{m\geq 1}\sup_{m\leq n\leq \alpha^{-1}(\beta(m))}\left(\sum_{j=m}^{n} u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=\alpha(n)}^{\beta(m)} a_{n_k,j}^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = F_1 + F_2. \qquad (3.1.19)$$

Енді $\|S_k\|$, $k \in N$ бағалаймыз. $\|S_k\|$ шамасы келесі теңсіздіктің ең кіші тұрақтысы болады

$$\left(\sum_{n=n_k}^{n_k'} u_n^q\left(\sum_{i=\beta(n_k)}^{\beta(n)} a_{n,i} f_i\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|S_k\| \left(\sum_{i=\beta(n_k)}^{\beta(n_k')} f_i^p v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall f \geq 0.$$

Бұл теңсіздікте $i = \beta(j)$ алмастыруын қолдып

$$\left(\sum_{n=n_k}^{n_k'} u_n^q\left(\sum_{j=n_k}^{n} \tilde{a}_{n,j} \tilde{f}_j\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|S_k\| \left(\sum_{j=n_k}^{n_k'} \tilde{f}_j^p \tilde{v}_j^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

аламыз, мұндағы $\tilde{\tilde{f}}_j = f_{\beta(j)}$, $\tilde{v}_j = v_{\beta(j)}$ және $\tilde{a}_{n,j} := a_{n,\beta(j)}$.
(3.1.2) формуласы бойынша $1 < m \leq n$, $\alpha(n) \leq i \leq \beta(m)$ үшін $a_{n,i} \approx b_{n,m}\omega_i + a_{m,i}$. Онда $n \geq m \geq j$ үшін $\tilde{a}_{n,j} \approx b_{n,m}\widetilde{\omega}_j + \tilde{a}_{m,j}$ [42, p.892] жұмыстағы 1.1 – шартын қанағаттандыратынын аламыз. Олай болса Теорема 1.1.5 бойынша

$$\|S_k\| \approx \sup_{n_k\leq m\leq n_k'}\left(\sum_{n=m}^{n_k'} b_{n,m}^q u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=n_k}^{m} \widetilde{\omega}_j^{p'} \tilde{v}_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+\sup_{n_k\leq m\leq n_k'}\left(\sum_{n=m}^{n_k'} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=n_k}^{m} \tilde{a}_{m,j}^{p'} \tilde{v}_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

$\beta(j) = i$ алмастыруын қайта қолданып және (3.1.13) формуласын ескеріп

$$\|S_k\| << \sup_{n_k\le m\le n'_k}\left(\sum_{n=m}^{n'_k} b_{n,m}^q u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=\alpha(n'_k)}^{\beta(m)} \omega_i^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+\sup_{n_k\le m\le n'_k}\left(\sum_{n=m}^{n'_k} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=\alpha(n'_k)}^{\beta(m)} a_{m,i}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

және

$$\sup_{k\ge1}\|S_k\| << \sup_{k\ge1}\sup_{n_k\le m\le n'_k}\left(\sum_{n=m}^{n'_k} b_{n,m}^q u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=\alpha(n'_k)}^{\beta(m)} \omega_i^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+\sup_{k\ge1}\sup_{n_k\le m\le n'_k}\left(\sum_{n=m}^{n'_k} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=\alpha(n'_k)}^{\beta(m)} a_{m,i}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

аламыз.

Онда, $m \le n'_k \le \alpha^{-1}(\beta(m))$ қолдана отырып

$$\sup_{k\ge1}\|S_k\| \le \sup_{m\ge1}\sup_{m\le n'_k\le\alpha^{-1}(\beta(m))}\left(\sum_{n=m}^{n'_k} b_{n,m}^q u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=\alpha(n'_k)}^{\beta(m)} \omega_i^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+\sup_{m\ge1}\sup_{m\le n'_k\le\alpha^{-1}(\beta(m))}\left(\sum_{n=m}^{n'_k} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=\alpha(n'_k)}^{\beta(m)} a_{m,i}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le \sup_{m\ge1}\sup_{m\le s\le\alpha^{-1}(\beta(m))}\left(\sum_{n=m}^{s} b_{n,m}^q u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=\alpha(s)}^{\beta(m)} \omega_i^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+\sup_{m\ge1}\sup_{m\le s\le\alpha^{-1}(\beta(m))}\left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{m,i}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le F_1 + F_2 \qquad (3.1.20)$$

аламыз.

Сонымен (3.1.14), (3.1.19) және (3.1.20) формулалардан $\|A\| << F_1 + F_2 = F < +\infty$ шығады, яғни оператор шенелген.

3.2. Қосындылау шектері айнымалы болатын матрицалық операторлар бір класының салмақты Лебег тізбектер кеңістіктерінде компактылығы

Бұл бөлімшеде 3.1 бөлімде қарастырылған A оператордың салмақты $l_{p,v}$ кеңістігінен салмақты $l_{q,u}$ кеңісігіне $1 < p \le q < \infty$ жағдайында компактылық қасиетінің қажетті және жеткілікті шарттары зерттелді.

Негізгі нәтижені дәлелдеу барысында біз төменде келтірілген l_p кеңістігіндегі жиындардың предкомпакт критерийін қолданамыз [78].

Теорема А. *Айталық $1 \le p < \infty$, $T \subset l_p$ болсын. T жиыны предкомпакт болуы үшін T жиыны шенелген және $\forall \varepsilon > 0$ үшін $N = N(\varepsilon)$ натурал саны табылып, барлық $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in T$ үшін келесі теңсіздіктің орындалуы қажетті және жеткілікті:*

$$\sum_{i=N}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon.$$

Айталық

$$(F_1)_m = \sup_{m \le s \le \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{m,k}^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{q}};$$

$$(F_2)_m = \sup_{m \le s \le \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q b_{n,m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} \omega_k^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 3.2.1. *Айталық $1 < p \le q < \infty$ болсын және (a_{nk}) матрицасының элементтері (3.1.2) шартын қанағаттандырсын. Онда (3.1.1) операторы $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне компакт болады сонда тек сонда, егер*

$$\lim_{m \to \infty} (F_1)_m = 0, \qquad (3.2.1)$$

$$\lim_{m \to \infty} (F_2)_m = 0. \qquad (3.2.2)$$

болса.

Дәлелдеу. Қажеттілігі. (3.1.1.) операторы компакт болсын.

Барлық $m, s \in \mathbb{N}$: $m \le s \le \alpha^{-1}(\beta(m))$ үшін келесі тізбекті анықтайық $\tilde{g} = \{\tilde{g}_k\}_{k=1}^{\infty}$: $\tilde{g}_k = \frac{\tilde{f}_k}{\|\tilde{f}\|_{pv}}$, мұндағы

$$\tilde{f}_k = \begin{cases} a_{mk}^{p'-1} v_k^{-p'}, & \alpha(s) \le k \le \beta(m), \\ 0, & k > \beta(m), k < \alpha(s). \end{cases}$$

Көрініп тұрғандай $\|\tilde{g}\|_{pv} = 1$. (3.1.1.) операторы $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне компакт болғандықтан $\{uA\phi, \|\phi\|_{pv} = 1\}$ жиыны l_q кеңістігінде предкомпакт болады. Сондықтан l_p кеңістігінде жиындардың предкомпакт критериі (Теорема А) бойынша

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\|\phi\|_{pv}=1} \left(\sum_{n=m}^{\infty} u_n^q \, (A\phi)_n^q \right)^{\frac{1}{q}} = 0. \qquad (3.2.3)$$

(3.2.3) формуласына (3.1.4) теңсіздігін қолданып, барлық

$$m, s \in \mathbb{N}: 1 \le m \le s \le \alpha^{-1}\big(\beta(m)\big)$$

үшін келесі өрнекті аламыз

$$\sup_{\|\phi\|_{pv}=1} \left(\sum_{n=m}^{\infty} u_n^q \, (A\phi)_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \ge \left(\sum_{n=m}^{\infty} u_n^q \, (A\tilde{g})_n^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{n=m}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)} a_{n,k} \tilde{g}_k \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \ge \frac{1}{d} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{m,k} \frac{a_{m,k}^{p'-1} v_k^{-p'}}{\|\tilde{f}\|_{pv}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \frac{1}{d} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{m,k}^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Онда әр $m \in \mathbb{N}$ үшін

$$\sup_{\|\phi\|_{pv}=1} \left(\sum_{n=m}^{\infty} u_n^q \, (A\phi)_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \gg$$

$$\gg \sup_{m \le s \le \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{m,k}^{p'} \, v_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = (F_1)_m. \quad (3.2.4)$$

(3.2.3) пен (3.2.4) формулалардан (3.2.1)-ді аламыз.

Енді (3.2.2) дәлелдеу үшін барлық $1 \le m \le s \le \alpha^{-1}\big(\beta(m)\big)$ үшін келесі тізбекті енгіземіз $\bar{g} = \{\bar{g}_k\}_{k=1}^{\infty}: \bar{g}_k = \frac{\bar{f}_k}{\|\bar{f}\|_{pv}}$, мұндағы

$$\bar{f}_k = \begin{cases} \omega_k^{p'-1} v_k^{-p'}, & \alpha(s) \le k \le \beta(m), \\ 0, \quad k > \beta(m), & k < \alpha(s). \end{cases}$$

(3.2.3)-ке (3.1.5) қолданып, барлық $1 \le m \le s \le \alpha^{-1}\big(\beta(m)\big)$ үшін келесі бағалауды аламыз

$$\sup_{\|\phi\|_{pv}=1}\left(\sum_{n=m}^{\infty} u_n^q\,(A\phi)_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \ge \left(\sum_{n=m}^{\infty} u_n^q\left(\sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)} a_{n,k}\,\bar{g}_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \ge$$

$$\ge \frac{1}{d}\left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q\left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} b_{n,m}\,\omega_k\,\frac{\bar{f}_k}{\|\bar{f}\|_{pv}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{d}\left(\sum_{n=m}^{s} b_{n,m}^q\,u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} \omega_k^{p'}\,v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Онда әр $m \in \mathbb{N}$ үшін

$$\sup_{\|\phi\|_{pv}=1}\left(\sum_{n=m}^{\infty} u_n^q\,(A\phi)_n^q\right)^{\frac{1}{q}} >>$$

$$>> \sup_{m\le s\le\alpha^{-1}(\beta(m))}\left(\sum_{n=m}^{\infty} b_{n,m}^q\,u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} \omega_k^{p'}\,v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = (F_2)_m. \qquad (3.2.5)$$

(3.2.3) пен (3.2.5) формулаларынан (3.2.2) орындалатындығы шығады.

Жеткіліктік. (3.2.1) мен (3.2.2) орындалсын делік. Онда Теорема-3.1.1 бойынша (3.1.1) операторы $l_{p,v}$ кеңістігінен $l_{q,u}$ кеңістігіне шенелген. Олай болса $\{uAf, \|f\|_{p,v} \le 1\}$ жиыны l_q кеңістігінде шенелген. Осы жиын l_q кеңістігінде предкомпакт екенін көрсетейік. l_q кеңістігіндегі жиындардың предкомпакт критерийі бойынша $\{uAf,\ \|f\|_{pv} \le 1\}$ жиыны l_q кеңістігінде предкомпакт болады, егер

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{\|f\|_{p,v}\le 1}\left(\sum_{n=r}^{\infty} u_n^q\,|(Af)_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} = 0 \qquad (3.2.6)$$

болса.

Онда Теорема 3.1.1 бойынша

$$\sup_{\|f\|_{p,v}\le 1}\left(\sum_{n=r}^{\infty} u_n^q\,|(Af)_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} << F(r), \qquad (3.2.7)$$

мұндағы $F(r) = F_1(r) + F_2(r)$, $\forall r \in \mathbb{N}$,

$$F_1(r) = \sup_{m \geq r} \sup_{m \leq s \leq \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{m,k}^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \sup_{m \geq r} (F_1)_m, \quad (3.2.8)$$

$$F_2(r) = \sup_{m \geq r} \sup_{m \leq s \leq \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q b_{n,m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} \omega_k^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} =$$
$$= \sup_{m \geq r} (F_2)_m. \quad (3.2.9)$$

(3.2.1), (3.2.2), (3.2,8) және (3.2.9) формулаларынан

$$\lim_{r \to \infty} F_1(r) = \lim_{r \to \infty} \sup_{m \geq r} (F_1)_m = \overline{\lim_{r \to \infty}} (F_1)_r = \lim_{r \to \infty} (F_1)_r = 0,$$

$$\lim_{r \to \infty} F_2(r) = \lim_{r \to \infty} \sup_{m \geq r} (F_2)_m = \overline{\lim_{r \to \infty}} (F_2)_r = \lim_{r \to \infty} (F_2)_r = 0.$$

теңдіктерін аламыз. Онда (3.2.7) ескере отырып, (3.2.6) формуласын аламыз. Теорема дәлелденді.

3.3. Қосындылау шегі айнымалы болатын матрицалық оператордың монотонды тізбектер жиынында салмақты бағалауы

Айталық $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ - теріс емес, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ - оң нақты сандар тізбегі болсын.

Келесі түрде анықталған жоғарғы шегі айнымалы болатын матрицалық операторды қарастырайық:

$$(Ag)_n = \sum_{i=1}^{\beta(n)} a_{n,i} g_i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.3.1)$$

мұндағы, $a_{n,i} \geq 0$, ал $\beta(n)$ – натурал сандар тізбегі және ол келесі қасиеттерге ие:

1) қатаң өспелі;
2) $\beta(1) = 1, \quad n < \beta(n), \ n \geq 2.$

Бұл бөлімшеде $1 < p \leq q < \infty$ жағдайында кез келген $l_{p,v}$ кеңістігінен алынған теріс емес, өспейтін $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ тізбектер үшін

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q \, (Ag)_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n^p v_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.3.2}$$

теңсіздігінің орындалуының қажетті және жеткілікті шартын алу есебін қарастырамыз, мұндағы C – g-дан тәуелсіз оң тұрақты сан, ал A операторының теріс емес элементтерден тұратын $(a_{n,i})$ матрицасы келесі шартты қанағаттандырады: *$d \geq 1$ саны, $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ оң сандар тізбегі, теріс емес $\left(b_{i,j}\right)$ матрицасы табылып, барлық $1 \leq k \leq n$ және $i \leq \beta(k)$ үшін келесі теңсіздік орындалсын*

$$\frac{1}{d}\left(b_{n,k}\omega_i + a_{k,i}\right) \leq a_{n,i} \leq d\left(b_{n,k}\omega_i + a_{k,i}\right). \tag{3.3.3}$$

Егер $\beta(n) = n,\ a_{n,i} \equiv 1, n \geq i \geq 1$ болса A операторы дискретті Харди операторын береді: $(Ag)_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Дискретті Харди операторының теріс емес тізбектер үшін орындалуы p және q параметрлерінің әртүрлі жағдайында толығымен зерттелген. Бұл проблеманың толық талдауы мен шолуын [12, p.57] жұмыстан көруге болады.

$a_{n,i} \equiv 1,\ n \geq i \geq 1$ болғанда (3.3.1) операторы жоғарғы шегі айнымалы болатын Харди операторын береді. Бұл оператордың теріс емес тізбектер үшін (3.3.2) түрдегі салмақты бағалауы [39, с.59], [40, с.10], [41, с.48] жұмыстарда зертелген.

Алайда жоғарғы не төменгі шегі айнымалы болатын матрицалық оператордың теріс емес, өспейтін тізбектер жиынында салмақты бағалауы осыған дейін қарастырылмаған еді. Бұл мәселені осы бөлімшеде қарастырамыз.

Айталық $\forall\ k, n \in \mathbb{N}$

$$V_k = \sum_{i=1}^{k} v_i^p, \qquad A_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} a_{n,\beta(j)}\,, \quad W_k = \sum_{j=1}^{k} \omega_{\beta(j)}.$$

Айталық, $m \in \mathbb{N}$ және $\Omega(m) \coloneqq \{n \in \mathbb{N}: \beta(n) \leq m\}$ болсын. $1 \in \Omega(m)$ болғандықтан, $\forall m \in \mathbb{N}$ үшін $\Omega(m) \neq \emptyset$ болады. Сондай-ақ $\forall\, m \in \mathbb{N}$ үшін $\beta^{-1}(m) \coloneqq \max \Omega(m)$ деп белгілейік. Онда

$$\beta^{-1}\left(\beta(m)\right) = m, \qquad \beta(\beta^{-1}(m)) \leq m$$

болады.

Негізгі нәтижені келтірейік.

Айталық

$$\mathcal{F}_1 = \sup_{s\ge1}\left(\sum_{n=1}^{s} u_n^q\left(\sum_{j=1}^{n} a_{n,\beta(j)}\right)\right)^{\frac{1}{q}} (V_s)^{-\frac{1}{p}}, \qquad (3.3.4)$$

$$\mathcal{F}_2 = \sup_{s\ge1}\left(\sum_{n=s}^{\infty} b_{n,s}^q u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{s}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)W_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \qquad (3.3.5)$$

$$\mathcal{F}_3 = \sup_{s\ge1}\left(\sum_{n=s}^{\infty} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{s}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)A_{s,k}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (3.3.6)$$

Теорема 3.3.1. *Айталық $1 < p \le q < \infty$ болсын. (3.3.2) теңсіздігі өспейтін теріс емес ($\downarrow g \ge 0$) тізбектері үшін орындалады сонда тек сонда, егер $\mathcal{F} = max\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\} < \infty$ болса. Сонымен қатар $\mathcal{F} \approx C$, мұндағы C – (3.3.2)-дегі ең кіші оң тұрақты.*

Дәлелдеу. (3.3.2) теңсіздігін ыңғайлы түрде жазып, Гелдер теңсіздігінің кері есебін қолданамыз

$$C = \sup_{\downarrow g\ge0}\frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q\left(\sum_{i=1}^{\beta(n)} a_{n,i}g_i\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\|g\|_{p,v}} = \sup_{\downarrow g\ge0}\sup_{f\ge0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sum_{i=1}^{\beta(n)} a_{n,i}g_i}{\|f\|_{q',u^{-1}}\|g\|_{p,v}} =$$

($i = \beta(j)$ алмастыруын қолданамыз және қосындылардың ретін ауыстырамыз)

$$= \sup_{\downarrow g\ge0}\sup_{f\ge0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sum_{j=1}^{n} a_{n,\beta(j)}g_{\beta(j)}}{\|f\|_{q',u^{-1}}\|g\|_{p,v}} = \sup_{f\ge0}\sup_{\downarrow g\ge0}\frac{\sum_{j=1}^{\infty} g_{\beta(j)}\sum_{n=j}^{\infty} f_n\, a_{n,\beta(j)}}{\|f\|_{q',u^{-1}}\|g\|_{p,v}} \approx$$

(дискретті Сойер принципін қолданамыз)

$$\approx \sup_{f\ge0}\frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)}\right)^{p'}\left(V_k^{\frac{-p'}{p}} - V_{k+1}^{\frac{-p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} + \frac{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)}}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}}{\|f\|_{q',u^{-1}}}.$$

Осыдан (3.3.2)теңсіздігі келесі теңсіздіктерге эквивалентті болатынын аламыз: $\lim_{k\to\infty} V_k = \infty$ жағдайында

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)}\right)^{p'}\left(V_k^{\frac{-p'}{p}} - V_{k+1}^{\frac{-p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \le \tilde{C}\|f\|_{q',u^{-1}}, \forall f_n \ge 0 \quad (3.3.7)$$

және $\lim\limits_{k\to\infty} V_k < \infty$ жағдайында

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)}\right)^{p'}\left(V_k^{\frac{-p'}{p}} - V_{k+1}^{\frac{-p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p\right)^{-\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \hat{C}\|f\|_{q',u^{-1}}, \quad \forall f_n \ge 0, \tag{3.3.8}$$

мұндағы $C \approx \tilde{C}$ егер $\lim\limits_{k\to\infty} V_k = \infty$, және $C \approx \hat{C}$ егер $\lim\limits_{k\to\infty} V_k < \infty$ болса.

Алдымен $\lim\limits_{k\to\infty} V_k = \infty$ жағдайын қарастырайық. $a_{n,\beta(j)}$, f_i теріс емес болғандықтан

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=j}^{\infty} f_n\, a_{n,\beta(j)} \approx \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=j}^{k} f_n a_{n,\beta(j)} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=k}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} f_n \sum_{j=1}^{n} a_{n,\beta(j)} + \sum_{n=k}^{\infty} f_n \sum_{j=1}^{k} a_{n,\beta(j)} = \sum_{n=1}^{k} f_n A_{n,n} + \sum_{n=k}^{\infty} f_n A_{n,k},$$

яғни

$$\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=j}^{\infty} f_n\, a_{n,\beta(j)}\right)^{p'} \approx \left(\sum_{n=1}^{k} A_{n,n} f_n\right)^{p'} + \left(\sum_{n=k}^{\infty} A_{n,k} f_n\right)^{p'}. \tag{3.3.9}$$

(3.3.9) өрнекті (3.3.7) формуласына қойсақ, онда (3.3.7) теңсіздігінің орындалуы келесі теңсіздіктердің бір мезгілде орындалуына эквивалентті болатынын аламыз

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{k} f_n A_{n,n}\right)^{p'}\left(V_k^{\frac{-p'}{p}} - V_{k+1}^{\frac{-p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \le \tilde{C}_1\|f\|_{q',u^{-1}}, \quad \forall f_n \ge 0, \tag{3.3.10}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty} f_n A_{n,k}\right)^{p'}\left(V_k^{\frac{-p'}{p}} - V_{k+1}^{\frac{-p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \le \tilde{C}_2\|f\|_{q',u^{-1}}, \quad \forall f_n \ge 0, \tag{3.3.11}$$

мұндағы

$$\tilde{C} \approx \max\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2\}. \qquad (3.3.12)$$

(3.3.10) теңсіздігі Харди теңсіздігі болып табылады және оның орындалуы үшін келесі шарттың орындалуы (Теорема 1.1.1 ***.(i)***) қажетті және жеткілікті

$$\mathcal{F}_1 = \sup_{s\geq 1}\left(\sum_{n=1}^{s} A_{n,n}^{q} u_n^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=s}^{\infty}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \sup_{s\geq 1} V_s^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{s} u_n^{q}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{n,\beta(j)}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \qquad (3.3.13)$$

$$\tilde{C}_1 \approx F_1 \qquad (3.3.14)$$

(3.3.11) теңсіздігіне дуалды теңсіздікті қарастырайық

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k A_{n,k}\right)^{q} u_n^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \tilde{C}_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^{p}\left(V_k^{\frac{-p'}{p}} - V_{k+1}^{\frac{-p'}{p}}\right)^{-\frac{p}{p'}}\right)^{\frac{1}{p}}, \forall\varphi \geq 0. \quad (3.3.15)$$

Келесі түрлендірулерді жасайық: $a_{n,\beta(j)} = \tilde{a}_{n,j}$, онда

$$A_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} a_{n,\beta(j)} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{a}_{n,j}.$$

(3.3.1) операторының матрицасы (3.3.3) шартын қанағаттандырғандықтан, $(\tilde{a}_{n,j})$ – матрицасының элементтері [47, p.892] жұмыстағы 1.1-шартын қанағаттандыратынын айқын көруге болады, яғни $1 \leq j \leq k \leq n$ үшін

$$\tilde{a}_{n,j} \approx b_{n,k}\widetilde{\omega}_j + \tilde{a}_{k,j}.$$

Айталық, $s \in \mathbb{N}$: $n \geq s \geq k \geq j$ болсын, онда

$$A_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} a_{n,\beta(j)} = \sum_{j=1}^{k}\tilde{a}_{n,j} \approx \sum_{j=1}^{k}\left(b_{n,s}\widetilde{\omega}_j + \tilde{a}_{sj}\right) = b_{n,s}\sum_{j=1}^{k}\widetilde{\omega}_j + \sum_{j=1}^{k}\tilde{a}_{s,j} =$$

$$= b_{n,s}\sum_{j=1}^{k}\omega_{\beta(j)} + \sum_{j=1}^{k} a_{s,\beta(j)} = b_{n,s}W_k + A_{s,k}.$$

Бұдан $\left(A_{n,k}\right)$ матрицасының элементтері де аталған [47, p.892] жұмыстағы 1.1-шартын қанағаттандыратыны шығады, онда Теорема 1.1.1(i) бойынша (3.3.15) теңсіздігі орындалуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті:

$$\mathcal{F}_2 = \sup_{s\geq 1}\left(\sum_{n=s}^{\infty} b_{n,s}^{q} u_n^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{s} W_k^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \tag{3.3.16}$$

$$\mathcal{F}_3 = \sup_{s\geq 1}\left(\sum_{n=s}^{\infty} u_n^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{s} A_{s,k}^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \tag{3.3.17}$$

$$\tilde{C}_2 \approx \max\{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}. \tag{3.3.18}$$

(3.3.14) пен (3.3.18) формулаларынан байқайтынымыз, (3.3.10) және (3.3.11) теңсіздіктер орындалады сонда тек сонда, егер $\mathcal{F} = \max\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\} < \infty$ болса. Онда (3.3.12) - ден $\tilde{C} = max\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\} < \infty$ екендігін аламыз. $C \approx \tilde{C}$ екенін ескерсек, $\mathcal{F} = max\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\} \approx C$ аламыз, яғни $\lim\limits_{k\to\infty} V_k = \infty$ болған жағдайда Теорема орындалады сонда тек сонда, егер $C = max\{F_1, F_2, F_3\} < \infty$ болса.

Енді $\lim\limits_{k\to\infty} V_k < \infty$ жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайда (3.3.2) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер (3.3.8) теңсіздігі орындалса немесе (3.3.7) теңсіздігімен қатар келесі теңсіздік орындалса:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^{p}\right)^{-\frac{1}{p}} \leq \hat{C}'\|f\|_{q',u^{-1}}, \quad \forall f_n \geq 0, \tag{3.3.19}$$

мұндағы $\hat{C}'$- (3.3.19) теңсіздігінің ең кіші оң тұрақтысы.

Олай болса $\lim\limits_{k\to\infty} V_k < \infty$ жағдайында (3.3.8) теңсіздік орындалады сонда тек сонда, егер $\hat{C} = \max\{\mathcal{F}_1',\ \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\} < \infty$ болса, мұндағы

$$\mathcal{F}_1' = \sup_{s\geq 1}\left(\sum_{n=1}^{s} A_{n,n}^{q} u_n^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(V_s^{-\frac{p'}{p}} - V_\infty^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Расында да, егер $\lim\limits_{k\to\infty} V_k < \infty$ болса, онда (3.3.14)-тен (3.3.10) теңсіздіктің $\mathcal{F}_1' < \infty$ болғанда ғана орындалатыны шығады, және $\mathcal{F}_1' \approx \tilde{C}_1$.

(3.3.19) теңсіздікте қосындылардың ретін алмастырсақ келесі теңсіздікті аламыз

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{j=1}^{n} a_{n,\beta(j)}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p\right)^{-\frac{1}{p}} \leq \hat{C}'\|f\|_{q',u^{-1}}, \quad \forall f_n \geq 0.$$

Онда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n A_{n,n}\right) \leq \hat{C}'\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{q'} u_n^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} V_{\infty}^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall f_n \geq 0.$$

Гелдер теңсіздігінің кері есебін қолдансақ

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q A_{n,n}^q\right)^{\frac{1}{q}} = \hat{C}' V_{\infty}^{\frac{1}{p}}.$$

Олай болса (3.3.19) теңсіздік орындалады сонда тек сонда, егер

$$\hat{C}' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q A_{n,n}^q\right)^{\frac{1}{q}} V_{\infty}^{-\frac{1}{p}} < \infty$$

болса.

$\frac{1}{2}\left(\mathcal{F}'_1 + \hat{C}'\right) < \mathcal{F}_1$болатыны айқын. Ал $\forall s \geq 1$ үшін

$$V_s^{-\frac{1}{p}} = \left(V_s^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(V_s^{-\frac{p'}{p}} - V_{\infty}^{-\frac{p'}{p}} + V_{\infty}^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(V_s^{-\frac{p'}{p}} - V_{\infty}^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}} + V_{\infty}^{-\frac{1}{p}},$$

аламыз, олай болса $\mathcal{F}_1 \leq \left(\mathcal{F}'_1 + \hat{C}'\right)$ екендігі шығады, яғни $\mathcal{F}_1 \approx \mathcal{F}'_1 + \hat{C}'$. Ендеше (3.3.10) және (3.3.19) теңсіздіктері орындалады сонда тек сонда, егер $\mathcal{F}_1 < \infty$ болса. Онда (3.3.8) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $\hat{C} \approx \max\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\} < \infty$. Бұл жағдайда $C \approx \hat{C}$ ескерсек, $C \approx \mathcal{F} = \max\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ екендігі шығады.

Олай болса $\lim\limits_{k\to\infty} V_k = \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} V_k < \infty$ екі жағдайда да (3.3.2) теңсіздігінің орындалуы үшін $C \approx \mathcal{F} = \max\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\} < \infty$ болуы қажетті және жеткілікті. Теорема дәлелденді.

3.4. Дискретті Гильберт-Стилтьес типтес оператордың Лебег тізбектер кеңістіктерінде салмақты бағалауы

Бұл бөлімде дискретті Гильберт-Стилтьес операторының $1 < p \leq q < \infty$ және $1 < q < p < \infty$ жағдайларында Лебег тізбектер кеңістігіндегі салмақты бағалаулары келтіріледі.

XX ғасырдың басында келесі түрде берілетін белгілі Гильберттің қос қатарлы теңсіздігі дәлелденді [9, p.272]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k g_n}{k+n} < \frac{\pi}{sin(\pi/p)}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, p > 1. \qquad (3.4.1)$$

мұндағы $f_k, g_k \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} f_n^p < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{p'} < \infty$, және $\frac{\pi}{sin(\pi/p)}$ ең кіші тұрақты. Бұл теңсіздік келесі түрдегі Харди-Гильберт теңсіздігіне эквивалентті

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{k+n}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\pi}{sin(\pi/p)}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p\right)^{\frac{1}{p}}, f_n \geq 0. \qquad (3.4.2)$$

Бұл теңсіздіктің орындалуы

$$(Hf)_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{k+n}$$

Гильберт операторының l_p кеңістігінен l_q кеңістігіне шенелгендігін білдіреді ([79] қараңыз). Айта кетейік, (3.4.1) мен (3.4.2) теңсіздіктерінің интегралдық аналогтарында да ең кіші тұрақтысы $\frac{\pi}{sin(\pi/p)}$ болып табылады ([9, p.276], [79, p.4] қараңыз).

(3.4.1) теңсіздігі мен оның жалпылаулары математиканың көп бөлімдерінің дамуында маңызды рөл атқарды. Көптеген авторлар Гильберттің қос қатарлы теңсіздіктері мен оның интегралдық аналогтарына, кері теңсіздіктерге, және әртүрлі жалпылауларына назарын аударды, мысалы [80]-[89]. Лебег салмақты кеңістіктерінде келесі түрде берілген

$$S_\gamma f(x) = \int_0^{\infty}\frac{f(t)}{(x+t)^{\gamma}}\,dt, x > 0, \gamma > 0$$

Стилтьес интегралдық операторының шенелгендігі мен оның дискретті аналогының

$$(Sf)_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{(k+n)^\gamma}, \ \gamma > 0$$

салмақты бағалаулары сәйкесінше $1 < p \leq q < \infty$ және $1 < q < p < \infty$ жағдайлары үшін [90], [91] жұмыстарда қарастырылған. Одан бөлек, [92] жұмыста $1 < p \leq q < \infty$ жағдайда Стилтьес операторы үшін салмақты интегралдық теңсіздіктің орындалуының альтернативті төрт шартының эквиваленттігі алынды. Осыған ұқсас нәтиже [93] жұмыста $0 < q < p,\ 1 < p < \infty$ жағдайда интегралдық Стилтьес теңсіздігі үшін алынды, және ол жерде $0 < q < 1$ жағдайды қамтитын Г. Синнамон [91, p.74] жұмысындағы нәтижесінің жаңа дәлелдеуі келтірілген.

Айталық $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ теріс емес, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$- оң нақты сандар тізбектері болсын.

Бұл бөлімшеде келесі түрде берілген жалпыланған Гильберт-Стилтьес теңсіздігін қарастырамыз

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n (Tf)_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |v_n f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall f \in l_{p,v}, \tag{3.4.3}$$

мұндағы

$$(Tf)_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{(b(k)+b(n))^\gamma} \tag{3.4.4}$$

Гильберт-Стилтьес типтес операторы, $\gamma > 0$ және $b: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кемімейтін бейнелеу, және $b(1) = 1$, $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$.

$\gamma = 1$, $b(n) = n$ болғанда (3.4.3) теңсіздігі (3.4.2) теңсіздігімен сәйкес келеді және T операторы Гильберт түрлендіруі деп атайды. $b(n) = n$ болғанда T операторы Стилтьес операторының дискретті аналогымен сәйкес келеді.

(3.4.4) операторын $f = \{f\}_{i=1}^{\infty}$ нақты сандар тізбектері үшін жоғарғы және төменгі қосындылау шектері айнымалы болатын келесі екі дискретті Харди операторлары түрінде жазуға болады:

$$(Tf)_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{(b(k)+b(n))^\gamma} \approx$$

$$\approx \frac{1}{b^\gamma(n)} \sum_{k=1}^{b(n)} f_k + \sum_{k=b(n)}^{\infty} \frac{f_k}{b^\gamma(k)} = (T_1 f)_n + (T_2 f)_n. \tag{3.4.5}$$

Осылайша осы бөлімнің негізгі нәтижелері, яғни (3.4.3) теңсіздіктің орындалуы Харди типтес екі теңсіздіктің орындалуымен сипатталады. Сондықтан алдымен қосындылау шектері айнымалы болатын $T_1,\ T_2$ операторлар үшін келесі түрде берілетін дискретті Харди типтес теңсіздіктердің орындалу критерийін анықтайық:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\sum_{k=1}^{b(n)}f_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{k=1}^{\infty}|v_kf_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \forall f\in l_{p,v}, \tag{3.4.6}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\sum_{k=b(n)}^{\infty}f_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{k=1}^{\infty}|v_kf_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \forall f\in l_{p,v} \tag{3.4.7}$$

себебі бұл теңсіздіктердің өз алдына дербес мағынасы бар.

Осы теңсіздіктердің орындалуы А. Альхалилдің [39, с.56], [40, с.10] жұмыстарында зерттелген, алайда бұл жұмыстарда $\{b(n)\}$ тізбегі қатаң өспелі натурал сандар тізбегі деп қарастырылған. Біз $1<q<p<\infty$ жағдайда сол шартты қалдырамыз, ал $1<p\le q<\infty$ жағдайда $\{b(n)\}$ тізбегін кемімейтін тізбек ретінде аламыз және екі жағдайда да дәлелдеудің жеткілікті жағдайын А. Альхалилдің дәлелдеуінен өзгеше әдіспен, осыған дейін [47, p.895] жұмыста қолданылған локализация әдісімен дәлелдейміз.

Айта кетейік, интегралдық Харди типтес операторлар үшін осыған ұқсас есептер [32, с.300], [35, p.451], [38, с.1319], [47, p.893], [76, с.265] жұмыстарда қарастырылды.

$1<p\le q<\infty$ жағдайы үшін нәтижелерді берейік.

Теорема 3.4.1. *Айталық $1<p\le q<\infty$ болсын. Онда (3.4.3) теңсіздігі орындалуы үшін $D=D_1+D_2<\infty$ болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$D_1=\sup_{n\ge1}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\left(\frac{u_i}{b^{\gamma}(i)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{b(n)}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$D_2=\sup_{n\ge1}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=b(n)}^{\infty}\left(\frac{v_k}{b^{\gamma}(k)}\right)^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Сонымен қатар, $D\approx C$, мұндағы C – (3.4.3) теңсіздігіндегі ең кіші оң тұрақты.

Теорема 3.3.1-ді дәлелдеу үшін алдымен (3.4.6) және (3.4.7) теңсіздіктерінің орындалуының критериін анықтайық.

Теорема 3.4.2. *Айталық* $1 < p \le q < \infty$ *болсын. Онда (3.4.6) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер*

$$A_1 = \sup_{n\ge1} \left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{b(n)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \qquad (3.4.8)$$

болса. Сонымен қатар, $A_1 \approx C$, *мұндағы C – (3.4.6) теңсіздігіндегі ең кіші оң тұрақты.*

Дәлелдеу. Қажеттілік. Айталық $\forall f \in l_{p,v}$ үшін (3.4.6) теңсіздігі орындалсын. $A_1 < \infty$ екенін көрсетейік. Айталық $\forall\ m \in \mathbb{N}$ болсын және келесідей берілген тексеру тізбегін қарастырайық:

$$\bar{f}_k = \begin{cases} v_k^{-p'}, & 1 \le k \le b(m); \\ 0, & k > b(m). \end{cases}$$

Онда

$$C\|\bar{f}\|_{p,v} = C\left(\sum_{k=1}^{b(n)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{b(n)} \bar{f}_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \ge$$

$$\ge \left(\sum_{n=m}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{b(m)} v_k^{-p'}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{b(m)} v_k^{-p'}\right)\left(\sum_{n=m}^{\infty} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.4.9)$$

(3.3.9) формуладан келесі шаманы аламыз

$$A_1 = \sup_{m\ge1} \left(\sum_{n=m}^{\infty} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{b(m)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \le C < \infty. \qquad (3.4.10)$$

Жеткіліктілік. Айталық $A_1 < \infty$ және $0 \le f \in l_{p,v}$ болсын. Әрбір $i \ge 1$ үшін келесі жиынды анықтайық:

$$T_i = \left\{k \in \mathbb{Z}:\ 2^k \le (Pf)_i := \sum_{k=1}^{b(i)} f_k\right\}, \qquad k_i = \max T_i.$$

Онда $\forall i \ge 1$ үшін

$$2^{k_i} \le (Pf)_i < 2^{k_i+1}, \qquad (3.4.11)$$

аламыз.

Айталық $m_1 = 1$ және $M_1 = \{i \in \mathbb{N}:\ k_i = k_1 = k_{m_1}\}$ болсын. $\sup M_1 + 1 = m_2$ болатындай m_2 бар делік. $m_2 > m_1$ болады, және M_1 жиыны жоғарыдан шенелген болса, онда $m_2 < \infty$ және $m_2 - 1 = \max M_1 = \sup M_1$ болады.

$1 = m_1 < m_2 <\ldots< m_s < \infty,\ s \geq 1$ екенін индуктивті түрде анықтайық. m_{s+1} анықтау үшін $m_{s+1} = sup\, M_s + 1$ деп ұйғарайық, мұндағы $M_s = \{i \in \mathbb{N}:\ k_i = k_{m_s}\}$.

Айталық $N_0 = \{s \in \mathbb{N}: m_s < \infty\}$. Одан ары ыңғайлы болу үшін $k_{m_s} = n_s,\ s \in N_0$ деп ұйғарамыз. m_s-ті анықтауымыз және (3.3.11) формуласы бойынша әр $s \in N_0$ үшін

$$2^{n_s} \leq (Pf)_i < 2^{n_s+1},\quad m_s \leq i \leq m_{s+1} - 1 \tag{3.4.12}$$

және

$$\mathbb{N} = \cup_{s\in N_0}[m_s, m_{s+1}).\ \mathbb{N} = \cup_{s\in N_0}\big[b(m_s),\ b(m_{s+1})\big),$$

аламыз, мұндағы

$$[m_s, m_{s+1}) \cap [m_l, m_{l+1}) = \emptyset,\quad [b(m_s), b(m_{s+1})) \cap [b(m_l), b(m_{l+1})) = \emptyset,\ s \neq l.$$

Олай болса

$$\|Pf\|_{q,u}^q = \sum_{s\in N_0} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} (Pf)_j^q\, u_j^q =$$
$$= \sum_{j=m_1}^{m_2-1} (Pf)_j^q\, u_j^q + \sum_{j=m_2}^{m_3-1} (Pf)_j^q u_j^q + \sum_{s\geq 3} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} (Pf)_j^q u_j^q . \tag{3.4.13}$$

Үш қосылғышты жеке қарастырамыз. Бірінші қосылғышта (3.3.12) формуласын және Гельдер теңсіздігін пайдаланып, келесі өрнекті аламыз

$$\sum_{j=m_1}^{m_2-1} (Pf)_j^q\, u_j^q \leq \sum_{j=m_1}^{m_2-1} 2^{(n_1+1)q}\, u_j^q \ll 2^{qn_1} \sum_{j=m_1}^{m_2-1} u_j^q \leq$$
$$\leq\ (Pf)_{m_1}^q \sum_{j=m_1}^{m_2-1} u_j^q \leq \left(\sum_{k=1}^{b(m_1)} f_k\right)^q \sum_{j=m_1}^{\infty} u_j^q \leq$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{b(m_1)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \sum_{j=m_1}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{k=1}^{b(m_1)} (v_k f_k)^p\right)^{\frac{q}{p}} \leq A^q \|f\|_{p,v}^q. \tag{3.4.14}$$

Дәл солайша екіншісін бағалаймыз

$$\sum_{j=m_2}^{m_3-1}(Pf)_j^q u_j^q \le 2^{(n_2+1)q}\sum_{j=m_2}^{m_3-1}u_j^q << 2^{qn_2}\sum_{j=m_2}^{m_3-1}u_j^q \le$$

$$\le (Pf)_{m_2}^q\sum_{j=m_2}^{m_3-1}u_j^q \le \left(\sum_{k=1}^{b(m_2)}f_k\right)^q\sum_{j=m_2}^{m_3-1}u_j^q \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{b(m_2)}v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\sum_{j=m_2}^{\infty}u_j^q\left(\sum_{k=1}^{b(m_2)}(v_kf_k)^p\right)^{\frac{q}{p}} \le A^q\|f\|_{p,v}^q\,. \qquad (3.4.15)$$

Ал $s \ge 3$ жағдайы үшін, (3.4.12) формуласын, сондай-ақ $n_{s-2} < n_{s-1} < n_s$ теңсіздігінен шығатын $n_{s-2}+1 \le n_{s-1}$ өрнегін пайдаланып 2^{n_s-1} бағалаймыз:

$$2^{n_s-1} = 2^{n_s} - 2^{n_s-1} \le 2^{n_s} - 2^{n_{s-2}+1} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{b(m_s)}f_k - \sum_{k=1}^{b(m_{s-1})}f_k \le \sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)}f_k. \qquad (3.4.16)$$

Гельдер мен Йенсен теңсіздіктерін пайдаланып, келесі түрлендірулерді аламыз

$$\sum_{s\ge3}\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1}(Pf)_j^q u_j^q \le \sum_{s\ge3}(2^{n_s+1})^q\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1}u_j^q <$$

$$< \sum_{s\ge3}(2^{n_s-1})^q\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1}u_j^q \le \sum_{s\ge3}\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)}f_k\right)^q\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1}u_j^q \le$$

$$\le \sum_{s\ge3}\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)}v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)}|f_kv_k|^p\right)^{\frac{q}{p}}\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1}u_j^q \le$$

$$\le \left(\sum_{s\ge3}\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)}v_k^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{j=m_s}^{\infty}u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}\|f\|_{p,v}^q \approx$$

$$\approx \left(\sum_{s\ge3}\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)}v_k^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\sum_{j=m_s}^{\infty}u_j^q\left(\sum_{i=j}^{\infty}u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}\|f\|_{p,v}^q \le$$

$$\leq \left(\sum_{s\geq 3}\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} |v_k f_k|^p\right)^{\frac{q}{p}} \left[\sup_{s\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{b(m_s)} v_k^{-p'}\right)\left(\sum_{j=m_s}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^q <$$

$$< A_1^q \|vf\|_p^q. \tag{3.4.17}$$

Онда (3.4.13), (3.4.14), (3.4.15) және (3.4.17) формулаларынан

$$\|Pf\|_{q,u} << A_1\|f\|_{p,v}, \quad f \geq 0,$$

шығады, сондай-ақ $C << A_1$ болады, ал өз кезегінде олар (3.4.10) формуласымен бірге $C \approx A_1$ береді.

Енді (3.4.7) теңсіздігінің орындалуының критерийін берейік.

Теорема 3.4.3. *Айталық* $1 < p \leq q < \infty$ *болсын. Онда (3.4.7) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер*

$$A_2 = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=b(n)}^{\infty} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \tag{3.4.18}$$

болса. Сонымен қатар, $C \approx A_2$, *мұндағы* C *– (3.4.7) теңсіздігіндегі ең кіші оң тұрақты.*

Дәлелдеу. Қажеттілік. $\forall f \in l_{p,v}$ үшін (3.4.7) теңсіздігі орындалсын, $A_2 < \infty$ екенін көрсетеміз. Айталық $\forall m, M$: $b(m) \leq M$, және

$$\bar{f}_k = \begin{cases} v_k^{-p'}, b(m) \leq k \leq M; \\ 0, \quad 1 \leq k < b(m) \end{cases}$$

болсын.

(3.4.7) теңсіздігіне $\bar{f}_k$ тізбегін қоямыз

$$C\|\bar{f}\|_{p,v} = C\left(\sum_{k=b(m)}^{M} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=b(m)}^{\infty} \bar{f}_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{n=1}^{m}\left(u_n \sum_{k=b(m)}^{M} v_k^{p'}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=b(m)}^{M} v_k^{p'}\right)\left(\sum_{n=1}^{m} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.4.19}$$

$\forall m, M \in \mathbb{N}$ екенін ескеріп (3.3.19) формуладан келесі шаманы аламыз

$$A_2 = \sup_{m\geq 1} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=b(m)}^{\infty} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C < \infty. \qquad (3.4.20)$$

Жеткіліктілік. Айталық $f \geq 0$ болсын. Барлық $i \geq 1$ үшін келесі жиынды анықтайық

$$T_i = \left\{k \in \mathbb{Z}:\ (Qf)_i := \sum_{j=b(i)}^{\infty} f_j \leq 2^{-k}\right\}$$

және $k_i = \max T_i$ деп алайық. Онда

$$2^{-(k_i+1)} \leq (Qf)_i < 2^{-k_i},\ i \geq 1. \qquad (3.4.21)$$

Айталық $m_1 = 1$ және $M_1 = \{i \in \mathbb{N}:\ k_i = k_1 = k_{m_1}\}$. $\sup M_1 + 1 = m_2$ болатындай m_2 бар делік. $m_2 > m_1$ болатындығы айқын және егер M_1 жиыны жоғарыдан шенелген болса, онда $m_2 < \infty$ және $m_2 - 1 = \max M_1 = \sup M_1$ болады. $1 = m_1 < m_2 <\ldots< m_s < \infty,\ s \geq 1$ екенін индуктивті түрде анықтайық.
m_{s+1} анықтау үшін $m_{s+1} = \sup M_s + 1$ делік, мұндағы $M_s = \{i \in \mathbb{N}:\ k_i = m_s\}$.

Айталық $N_0 = \{s \in \mathbb{N}: m_s < \infty\}$. Одан ары ыңғайлы болу үшін $k_{m_s} = n_s,\ s \in N_0$ деп алайық. m_s-ті анықтағанымыз бойынша және (3.4.21)-ден $s \in N_0$ болғанда келесі теңсіздік анықталады

$$2^{-(n_s+1)} \leq (Qf)_i < 2^{-n_s},\quad m_s \leq i \leq m_{s+1} - 1 \qquad (3.4.22)$$

және

$$\mathbb{N} = \bigcup_{s\in N_0} [m_s, m_{s+1}). \quad \mathbb{N} = \bigcup_{s\in N_0} \big[b(m_s),\ b(m_{s+1})\big),$$

мұндағы $[m_s, m_{s+1}) \cap [m_l, m_{l+1}) = \emptyset$, $[b(m_s), b(m_{s+1})) \cap [b(m_l), b(m_{l+1})) = \emptyset,\ s \neq l$.
Онда

$$\|Qf\|_{q,u}^q = \sum_{s\in N_0} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} (Qf)_j^q\, u_j^q \leq \sum_{s\in N_0} 2^{-n_s q} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q <$$
$$< \sum_{s\in N_0} 2^{-(n_s+2)q} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q. \qquad (3.4.23)$$

$n_s < n_{s+1} < n_{s+2}$ теңсіздігінен шығатын $n_s + 2 \le n_{s+2}$ өрнегі арқылы $2^{-(n_s+2)}$ шамасын бағалайық.

$$2^{-(n_s+2)} = 2^{-(n_s+1)} - 2^{-(n_s+2)} \le 2^{-(n_s+1)} - 2^{-n_{s+2}} \le (Qf)_{m_{s+1}-1} - (Qf)_{m_{s+2}} =$$
$$= \sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{\infty} f_n - \sum_{n=b(m_{s+2})}^{\infty} f_n \le \sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} f_n. \qquad (3.4.24)$$

(3.3.24) формуласын және Гельдер теңсіздігін пайдаланып, (3.3.23)-тен келесі өрнекті аламыз

$$\|Qf\|_{q,u}^q << \sum_{s\in N_0} 2^{-(n_s+2)q} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \le \sum_{s\in N_0} \left(\sum_{i=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} f_i \right)^q \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \le$$
$$\le \sum_{s\in N_0} \left(\sum_{i=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} f_i^p v_i^p \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{i=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} v_i^{-p'} \right) \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q << A_2^q \|vf\|_p^q.$$

Осыдан $C << A_2$ аламыз. Ал бұл (3.4.20) формуласымен бірге $C \approx A_2$ береді. Теорема 3.4.3 дәлелденді.

Теорма 3.4.2 мен Теорема 3.4.3 пайдаланып негізгі нәтижені аламыз:
Теорема 3.4.1 дәлелдеуі. (3.4.5) шартынан (3.4.3) теңсіздігінің орындалуы келесідей берілген Харди типтес теңсіздіктердің орындалуымен эквивалентті екенін көрсетеді.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{u_n}{b^{\gamma}(n)} \sum_{k=1}^{b(n)} f_k \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \le C_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k f_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_{p,v}, \qquad (3.4.25)$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n \sum_{k=b(n)}^{\infty} \frac{f_k}{b^{\gamma}(k)} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \le C_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k f_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_{p,v} \qquad (3.4.26)$$

және $C \approx C_1 + C_2$, мұндағы $C_1,\ C_2$ – (3.4.25) пен (3.4.26) теңсіздіктердегі ең кіші оң тұрақтылар.
Онда Теорема 3.4.2 және Теорема 3.4.3 бойынша (3.4.25) пен (3.4.26) теңсіздіктерінің орындалуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті

$$C_1 \approx D_1 = \sup_{n\geq 1} \left(\sum_{i=n}^{\infty}\left(\frac{u_i}{b^{\gamma}(i)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{b(n)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$C_2 \approx D_2 = \sup_{n\geq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=b(n)}^{\infty} \left(\frac{v_k}{b^{\gamma}(k)}\right)^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Теорема дәлелденді.

Енді $1 < q < p < \infty$ жағдайын қарастырайық.
Нәтижелерді дәлелдеуде қажет болатын тұжырымдамаларды келтірейік:
Лемма В. [39, с.62] *Айталық* $1 < q < p < \infty$ *болсын. Онда*

$$\tilde{B}_1 := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k^q\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{k=1}^{b(n)} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} =: B_1.$$

Айталық $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ қатаң өспелі натурал сан тізбегі болсын. Сондай-ақ $\sigma(s) := \{n \in \mathbb{N}: \ b(n) \leq s\}$ болсын. $\sigma(s) \neq \emptyset$, себебі ең болмағанда $1 \in \sigma(s)$ бар болады. Сонымен қатар $\forall s \in \mathbb{N}$ үшін $b^{-1}(s) := max\{\sigma(s)\}$ болсын. Онда $b^{-1}(b(s)) = s, \ \ b(b^{-1}(s)) \leq s$.

Теорема 3.4.4. *Айталық* $1 < q < p < \infty$ *болсын. Онда (3.4.3) теңсіздігінің орындалуы үшін* $E = E_1 + E_2 < \infty$ *болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы*

$$E_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{\infty} \frac{u_j^q}{b^{\gamma}(j)}\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty,$$

$$E_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{v_j^{-p'}}{b^{\gamma}(j)}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{b^{-1}(k)} u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty.$$

Сонымен қатар, $E \approx C$, *мұндағы* C *– (3.4.3)- теңсіздігіндегі ең кіші оң тұрақты.*

Теорема 3.4.4-ті дәлелдемес бұрын (3.4.6) және (3.4.7) теңсіздіктерінің орындалуын $1 < q < p < \infty$ жағдайы үшін көрсетейік.

Теорема 3.4.5. *Айталық $1 < q < p < \infty$ болсын. Онда (3.4.6) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер*

$$B_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{\infty} u_j^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'} \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty, \qquad (3.4.27)$$

болса. Сонымен қатар, $B_1 \approx C$, мұндағы C – (3.4.6) теңсіздігіндегі ең кіші оң тұрақты.

Дәлелдеу. Қажеттілік. (3.4.6) теңсіздігі $\forall f \in l_{p,v}$ үшін орындалсын. $B_1 < \infty$ екенін көрсетейік. Айталық $m \geq 1$ болсын және келесі түрдегі тексеру тізбегін қарастырайық:

$$\tilde{f}_k = \begin{cases} \left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{m} u_j^q \right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} v_k^{-p'}, 1 \leq k \leq m \text{ үшін} \\ 0, \quad k > m \text{ үшін} \end{cases}$$

Онда

$$\|\tilde{f}\|_{p,v} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^p \tilde{f}_k^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{m} u_j^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.4.28)$$

(3.4.6) теңсіздіктің сол жағына $\tilde{f}_k$ тізбегін қойып, (2.1.14) формуланы қолданып және қосындылау ретін алмастырамыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \sum_{k=1}^{b(n)} \tilde{f}_k \right)^q >> \sum_{n=1}^{m} u_n^q \sum_{k=1}^{b(n)} \tilde{f}_k \left(\sum_{i=1}^{k} \tilde{f}_i \right)^{q-1} \approx \sum_{k=1}^{b(m)} \tilde{f}_k \left(\sum_{i=1}^{k} \tilde{f}_i \right)^{q-1} \sum_{n=b^{-1}(k)}^{m} u_n^q =$$

$$= \sum_{k=1}^{b(m)} \tilde{f}_k \left(\sum_{n=b^{-1}(k)}^{m} u_n^q \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=b^{-1}(i)}^{m} u_j^q \right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\sum_{s=1}^{i} v_s^{-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} v_i^{-p'} \right)^{q-1} >>$$

$$>> \sum_{k=1}^{b(m)} \tilde{f}_k \left(\sum_{n=b^{-1}(k)}^{m} u_n^q \right) \left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{m} u_j^q \right)^{\frac{q-1}{p-q}} \left(\left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p-1}{p-q}} \right)^{q-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{b(m)} \tilde{f}_k \left(\sum_{n=b^{-1}(k)}^{m} u_n^q \right)^{\frac{p-1}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'} \right)^{\frac{(p-1)(q-1)}{p-q}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{b(m)} \left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{m} u_j^q \right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} v_k^{-p'} \left(\sum_{n=b^{-1}(k)}^{m} u_n^q \right)^{\frac{p-1}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'} \right)^{\frac{(p-1)(q-1)}{p-q}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{b(m)} \left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{m} u_j^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \qquad (3.4.29)$$

(3.4.6), (3.4.28) және (3.4.29) формулаларынан

$$B_1 << C < \infty \qquad (3.4.30)$$

аламыз.

Жеткіліктілік. $B_1 < \infty$ және $0 \leq f \in l_{p,v}$ болсын. Теорема 3.4.2-нің жеткілікті жағдайының дәлелдеуіндегі сияқты локализация әдісін қолданып, (3.4.13) формуласын аламыз. Енді (3.4.13) формуладағы үш қосылғышты бағалайық.

Бірінші қосылғышта (3.4.12), (2.1.15) формулаларын және Гельдер теңсіздігін пайдаланып

$$\sum_{j=m_1}^{m_2-1} (Pf)_j^q u_j^q \leq \sum_{j=m_1}^{m_2-1} 2^{(n_1+1)q} u_j^q \ll 2^{qn_1} \sum_{j=m_1}^{m_2-1} u_j^q \leq$$

$$\leq (Pf)_{m_1}^q \sum_{j=m_1}^{m_2-1} u_j^q \leq \left(\sum_{k=1}^{b(m_1)} f_k \right)^q \sum_{j=m_1}^{\infty} u_j^q \approx$$

$$\approx \left(\sum_{k=1}^{b(m_1)} f_k \right)^q \left(\sum_{j=m_1}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{b(m_1)} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{b(m_1)} f_k^p v_k^p \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{j=m_1}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{j=m_1}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\sum_{k=1}^{b(m_1)} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \|f\|_{p,v}^q \le$$

$$\le \left(\sum_{j=m_1}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{k=1}^{b(j)} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{p,v}^q \le$$

$$\le \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{k=1}^{b(j)} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_j^q \right)^{\frac{p-q}{pq}} \right)^q \|f\|_{pv}^q = \tilde{B}_1^q \|f\|_{p,v}^q.$$

Лемма В қолдану арқылы

$$\sum_{j=m_1}^{m_2-1} (Pf)_j^q u_j^q << {B_1}^q \|f\|_{p,v}^q \tag{3.4.31}$$

аламыз.

(3.4.13)-тің екінші қосылғышы үшін (3.4.12), (2.1.15) формулаларын, Гельдер теңсіздігін және Лемма В қолданамыз:

$$\sum_{j=m_2}^{m_3-1} (Pf)_j^q \, u_j^q \le 2^{(n_2+1)q} \sum_{j=m_2}^{m_3-1} u_j^q << 2^{n_2 q} \sum_{j=m_2}^{m_3-1} u_j^q \le (Pf)_{m_2}^q \sum_{j=m_2}^{m_3-1} u_j^q \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{b(m_2)} f_k \right)^q \left(\sum_{j=m_2}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{b(m_2)} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{b(m_2)} f_k^p v_k^p \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{j=m_2}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \le$$

$$\le \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{k=1}^{b(j)} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}} \right)^q \|f\|_{pv}^q \approx {B_1}^q \|f\|_{p,v}^q. \tag{3.4.32}$$

(3.4.13)-тің үшінші қосылғышы үшін (3.4.12), (3.4.16) формулаларын және сәйкесінше p, p' және $\frac{p}{q}, \frac{p}{p-q}$ көрсеткіштерімен Гельдер теңсіздігін екі рет, сонымен қатар Йенсен теңсіздігі мен (2.1.15) формуласын қолданып келесі бағалауды аламыз

$$(Pf)_j^q u_j^q \leq \sum_{s\geq 3} (2^{n_s+1})^q \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q <<$$

$$\ll \sum_{s\geq 3} (2^{n_s-1})^q \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \leq \sum_{s\geq 3} \left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} f_k \right)^q \sum_{j=m_s}^{\infty} u_j^q \leq$$

$$\leq \sum_{s\geq 3} \left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} f_k^p v_k^p \right)^{\frac{q}{p}} \sum_{j=m_s}^{\infty} u_j^q \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s\geq 3} \left(\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \sum_{j=m_s}^{\infty} u_j^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\sum_{s\geq 3} \left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} f_k^p v_k^p \right)^{\frac{q}{p}\cdot\frac{p}{q}} \right)^{\frac{q}{p}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s\geq 3} \left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{j=m_s}^{\infty} u_j^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{p,v}^q \approx$$

$$\approx \left(\sum_{s\geq 3} \left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} v_k^{-p\prime} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \sum_{j=m_s}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{p,v}^q \leq$$

$$\leq \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{k=1}^{b(j)} v_k^{-p\prime} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_j^q \right)^{\frac{p-q}{pq}} \right)^q \|f\|_{p,v}^q \approx \tilde{B}_1^q \|f\|_{p,v}^q.$$

Бұл жерде Лемма B көмегімен

$$\sum_{s\geq 3} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} (Pf)_j^q u_j^q << B_1^q \|f\|_{p,v}^q \tag{3.4.33}$$

аламыз. Осылайша (3.4.13), (3.4.32) және (3.4.33) формулаларынан

$$\|Pf\|_{q,u} << B_1\|f\|_{p,v}, \quad \forall f \in l_{p,v}$$

шығады, яғни $f \in l_{p,v}$ үшін (3.4.6) теңсіздігі орындалады және (3.4.6) теңсіздігіндегі ең кіші тұрақты үшін $C << B_1$ болады, ал ол өз кезегінде (3.4.30) формуласымен бірге $C \approx B_1$ береді. Теорема 3.4.5 дәлелденді.

Теорема 3.4.6 дәлелдеу үшін келесі Лемманы қолданамыз:

Лемма 3.4.1. *Айталық* $1 < q < p < \infty$ *болсын. Онда келесі эквиваленттік орындалады*:

$$\tilde{B}_2 := \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left(\sum_{j=1}^{k} u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{i=b(k)}^{\infty} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} \approx$$

$$\approx \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{b^{-1}(k)} u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} = B_2.$$

Дәлелдеу. $\tilde{B}_2$ шамасына (2.1.15) формуласын қолданамыз:

$$\tilde{B}_2 := \sum_{j=1}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{i=1}^{j} u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{n=b(j)}^{\infty} v_n^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \approx$$

$$\approx \sum_{j=1}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{i=1}^{j} u_{i=1}^q\right)^{\frac{q}{p-q}} \sum_{n=b(j)}^{\infty} v_n^{-p\prime} \left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{-p\prime}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} =$$

($\tau = b(j)$ алмастыруын қолданып, қосындылау ретін ауыстырамыз)

$$= \sum_{\tau=1}^{\infty} u_{b^{-1}(\tau)}^q \left(\sum_{i=1}^{b^{-1}(\tau)} u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} \sum_{n=\tau}^{\infty} v_n^{-p'} \left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{-p\prime} \left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{-p\prime}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \sum_{\tau=1}^{n} u_{b^{-1}(\tau)}^q \left(\sum_{i=1}^{b^{-1}(\tau)} u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} =$$

($b^{-1}(\tau) = j$ алмастыруын жасап, (2.1.14) эквиваленттігін қолданамыз)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{-p'} \left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \sum_{j=1}^{b^{-1}(n)} u_j^q \left(\sum_{i=1}^{j} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \approx$$

$$\approx \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{-p'} \left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\sum_{j=1}^{b^{-1}(n)} u_j^q \right)^{\frac{p}{p-q}}.$$

Лемма дәлелденді.

Енді $1 < q < p < \infty$ жағдайы үшін (3.4.7) теңсіздігінің орындалуының критерийін берейік.

Теорема 3.4.6. *Айталық $1 < q < p < \infty$ болсын. Онда (3.4.7) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер*

$$B_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} v_j^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{b^{-1}(k)} u_i^q \right)^{\frac{p}{p-q}} v_k^q \right)^{\frac{p-q}{pq}} < +\infty.$$

Сонымен қатар, $B_2 \approx C$, мұндағы C – (3.4.7) теңсіздігіндегі ең кіші оң тұрақты.

Дәлелдеу. Қажеттілік. Айталық (3.4.7) теңсіздік $\forall f \in l_{p,v}$ үшін орындалсын. $B_2 < \infty$ екенін көрсетейік. $\forall m \geq 1$ болсын және келесі түрде берілген тексеру тізбегін қарстырайық:

$$\tilde{f}_k = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{b^{-1}(k)} u_n^q \right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\sum_{i=k}^{m} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} v_k^{-p'}, & 1 \leq k \leq m, \\ 0, & k > m. \end{cases}$$

Онда

$$\|\tilde{f}\|_{pv} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^p \tilde{f}_k^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{b^{-1}(k)} u_j^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{m} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.4.34)$$

(3.4.7) теңсіздігінің сол жағына $\tilde{f}_k$ қойып, $s = b(n)$ алмастыруын, (2.1.15) формуласын қолданып және қосындылау ретін өзгертсек

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=b(n)}^{\infty} \tilde{f}_k \right)^q \approx \sum_{s=1}^{\infty} u_{b^{-1}(s)}^q \sum_{k=s}^{\infty} \tilde{f}_k \left(\sum_{i=k}^{\infty} \tilde{f}_i \right)^{q-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k \left(\sum_{i=k}^{\infty} \tilde{f}_i \right)^{q-1} \sum_{s=1}^{k} u_{b^{-1}(s)}^q \geq \sum_{k=1}^{m} \tilde{f}_k \left(\sum_{i=k}^{m} \tilde{f}_i \right)^{q-1} \sum_{s=1}^{k} u_{b^{-1}(s)}^q =$$

($b^{-1}(s) = n$ алмастыруын жасап, $\tilde{f}$ тексеру тізбегін қоямыз)

$$= \sum_{k=1}^{m} \tilde{f}_k \left(\sum_{i=k}^{m} \tilde{f}_i \right)^{q-1} \sum_{n=1}^{b^{-1}(k)} u_n^q =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \tilde{f}_k \left(\sum_{i=k}^{m} \left(\sum_{n=1}^{b^{-1}(i)} u_n^q \right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\sum_{j=i}^{m} v_j^{-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} v_i^{-p'} \right)^{q-1} \sum_{n=1}^{b^{-1}(k)} u_n^q \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{m} \tilde{f}_k \left(\sum_{i=k}^{m} \left(\sum_{j=i}^{m} v_j^{-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} v_i^{-p'} \right)^{q-1} \left(\sum_{n=1}^{b^{-1}(k)} u_n^q \right)^{\frac{p-1}{p-q}} \approx$$

((2.1.15) эквиваленттігін қолданамыз)

$$\approx \sum_{k=1}^{m} \tilde{f}_k \left(\sum_{i=k}^{m} v_i^{-p'} \right)^{\frac{(p-1)(q-1)}{p-q}} \left(\sum_{n=1}^{b^{-1}(k)} u_n^q \right)^{\frac{p-1}{p-q}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{n=1}^{b^{-1}(k)} u_n^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=k}^{m} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.4.35)$$

(3.4.7), (3.4.34) және (3.4.35) формулаларынан

$$B_2 << C < \infty \qquad (3.4.36)$$

шығады.

Жеткіліктік. $B_2 < \infty$ және $0 \leq f \in l_{p,v}$ болсын. Теорема 3.4.3-тің жеткілікті жағдайының дәлелдеуіндегі сияқты локализация әдісін қолданып, (3.4.23) формуласын аламыз.

(3.4.24) пен Гельдер теңсіздігін пайдаланып (3.4.23) теңсіздігінен келесі бағалауды аламыз:

$$\|Qf\|_{q,u}^q << \sum_{s\in N_0} 2^{-(n_s+2)} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \leq \sum_{s\in N_0} \left(\sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} f_n \right)^q \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \leq$$

$$\leq \sum_{s\in N_0} \left(\sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} v_n^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} f_n^p v_n^p \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \right).$$

$\frac{p}{q}, \frac{p}{p-q}$ көрсеткіштерімен Гельдер теңсіздігін және (2.1.14) қолданамыз, онда

$$\|Qf\|_{q,u}^q \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s\in N_0} \left(\left(\sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} v_n^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \right) \right)^{\frac{p}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\sum_{s\in N_0} \sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} f_n^p v_n^p \right)^{\frac{q}{p}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s\in N_0} \left(\sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} v_n^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \left(\sum_{i=m_s}^{j} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_p^q \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s\in N_0} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} \left(\sum_{n=b(j)}^{\infty} v_n^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{j} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} u_j^q \right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{p,v}^q \leq$$

$$= \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{i=1}^{j} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{n=b(j)}^{\infty} v_n^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{qp}} \right)^q \|f\|_{p,v}^q = \tilde{B}_2. \qquad (3.4.37)$$

Лемма 3.4.1 пайдаланып,

$$C << B_2 < +\infty \qquad (3.4.38)$$

аламыз. Сонымен (3.4.36) мен (3.4.38) формулаларынан $C \approx B_2$ шығады.

Енді Теорема 3.4.5 пен Теорема 3.4.6 пайдаланып негізгі нәтижені аламыз

Теорема 3.4.4 дәлелдеуі. (3.4.5) шартынан (3.4.3) теңсіздігінің орындалуы келесі түрде берілген Харди типтес теңсіздіктердің орындалуымен пара-пар екендігі шығады

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{u_n}{b^{\gamma}(n)}\sum_{k=1}^{b(n)}f_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}|v_k f_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_{p,v}, \tag{3.4.39}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\sum_{k=b(n)}^{\infty}\frac{f_k}{b^{\gamma}(k)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}|v_k f_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_{p,v} \tag{3.4.40}$$

және $C \approx C_1 + C_2$, мұндағы C_1, C_2 – (3.4.39) бен (3.4.40) формулаларындағы ең кіші оң тұрақтылар. Онда Теорема 3.4.5 пен Теорема 3.4.6 бойынша (3.4.39) бен (3.4.40) теңсіздіктер орындалады сонда тек сонда, егер

$$C_1 \approx E_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{\infty}\frac{u_j^q}{b^{\gamma}(j)}\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty,$$

$$C_2 \approx E_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=b(k)}^{\infty}\left(\frac{v_j}{b^{\gamma}(j)}\right)^{p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty$$

орындалса. Онда (3.4.3) теңсіздігі орындалу үшін $E = E_1 + E_2 < \infty$ болуы қажетті және жеткілікті және $C \approx E$.
Теорема толығымен дәлелденді.

Қорытынды

Функциялар теориясында, гармоникалық талдауда, айырымдық теңдеулер теориясында, айырымдық операторлары бар кеңістіктерді енгізу теориясында, айырымдық операторлардың спектрлік теориясында және талдаудың басқа салаларында матрицалық операторлардың әртүрлі қасиеттері маңызды рөл атқарады. Матрицалық операторлар теориясында әртүрлі тізбектер кеңістіктеріндегі шенелгендік, компактылық пен оператордың нормасын бағалау сұрақтары ерекше орын алады. Дегенмен, теориялық және қолданбалы маңызы бар кейбір салаларда бұл сұрақтар әлі де ашық күйінде қалып отыр. Сондықтан әртүрлі талдау есептерін шешуде кездесетін матрицалық операторларды қамтитын матрицалық операторлардың кейбір кластарын анықтау және олардың қасиеттерін зерттеу туралы сұрақ туындайды.

Диссертациялық жұмыста Лебег тізбектер кеңістігінде анықталған матрицалық операторлардың әртүрлі кластары үшін салмақты теңсіздіктер зерттеліп, келесі ғылыми мәселелер шешілді:

- $1 < q < p < \infty$ жағдайы үшін салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде $\mathcal{O}_2^{\pm}$ класына жататын матрицалық операторлардың шенелгендігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды;
- $1 < p \leq q < \infty$ жағдайы үшін салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде қосындылау шектері айнымалы болатын матрицалық операторлардың шенелгендігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды;
- $1 < p \leq q < \infty$ жағдайы үшін салмақты Лебег тізбектер кеңістігінде қосындылау шектері айнымалы болатын матрицалық операторлардың компактылығының қажетті және жеткілікті шарттары алынды;
- $1 < p \leq q < \infty$ жағдайы үшін теріс емес өспейтін тізбектер жиынында қосындылау шегі айнымалы болатын матрицалық оператор үшін салмақты бағалау алынды;
- $1 < p, q < \infty$ болған жағдайда Гильберт–Стилтьес типтес дискретті оператордың Лебег тізбектер кеңістігіндегі салмақты бағалауының қажетті және жеткілікті шарттары алынды.

Жұмыста Батуев–Степановтың блок-диагональды әдісі, локализация әдісі, сондай-ақ Харди типтес салмақты теңсіздіктер мен Сойер принципі қолданылды.

Алынған нәтижелер дискретті салмақты теңсіздіктерді жалпылап, бұрын зерттелмеген матрицалық операторлар кластарын сипаттауға мүмкіндік береді. Зерттеу нәтижелері функционалдық талдауда, айырымдық операторлар теориясында, сондай-ақ Соболев типтес салмақты кеңістіктерді енгізу теориясында қолдануға болады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Гольдман М.Л. Точные оценки норм оператора типа Харди на конусах квазимонотонных функций // Тр. МИ им. В.А. Стеклова. -2001. – Т. 232, №1. – С. 109-137.

2. Kalybay A, Karatayeva D, Oinarov R, Temirkhanova A. Oscillation of a second order half-linear difference equation and the discrete Hardy inequality // Electronic J. Qual. Theory of Differ. Equ. - 2017. - №43. - P. 1–16.

3. Kalybay A, Karatayeva D. Oscillation and Nonoscillation Criteria for a Half-Linear Difference Equation of the Second Order and the Extended Discrete Hardy Inequality // Ukrainian mathematical journal. – 2022. - Vol. 74, Issue 1. - P. 50-68.

4. Stieglitz M., Tietz H. Matrix transformationen von Folgenräumen Eine Ergebnisübersicht // Math.Z. – 1977. - Vol. 154. - 16p.

5. Bennett G. Some elementary inequalities // Quart. J. Math. Oxford Ser.(2). – 1987. - Vol.38, №152. - P.401-425.

6. Bennett G. Some elementary inequalities II // Quart. J. Math. OxfordSer. (2). – 1987. - Vol.39, №156. - P.385-400.

7. Bennett G. Some elementary inequalities III // Quart. J. Math. Oxford Ser.(2). – 1991. - Vol.42, №166. - P.149-174.

8. Braverman M. Sh., Stepanov V.D. On the discrete Hardy inequality // Bull. LondonMath. Soc.26. – 1994. №3. - P.283-287.

9. Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. Inequalities, 2nd edition // Cambridge University Press, Cambridge. - 1952.- 336p.

10. Opic B., Kufner A. Hardy-type Inequalities // Pitman Research Notes in Mathematics Series, 219, Longman Scientific & Technical, Harlow. - 1990. – 333 p.

11. Kufner A., Persson L-E. Weighted Inequalities of Hardy type, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ. - 2003. –357 p.

12. Kufner A., Maligranda L., Persson L-E. // The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results, Vydavatelský Servis, Pilzen. – 2007. - 162 p.

13. Andersen K.F., Heinig H.P. Weighted norm inequalities for certainintegral operators // SIAMJ.Math. – 1983. - Vol. 14. - P.834-844.

14. Heinig H.P. Weighted norm inequalities for certain integral operators. II // Proc.Amer. Math.Soc. – 1985. - Vol. 95, №3, - P.387-395.

15. Ойнаров Р., Шалгинбаева С.Х. Весовая аддитивная оценка одного класса матричных операторов // Известия НАН РК, Серия физ.-мат.- 2004. - №1. –

С.39-49.

16. Oinarov R., Okpoti C.A., Persson L-E. Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case $q < p$ // Math. Inequal. Appl. – 2007. - Vol. 10, №4. - P.843-861.

17. Shaimardan S, Shalgynbaeva S. Hadry-type inequalities for matrix operators // Bulleten of the Karaganda University –Mathematics. – 2017. - Vol. 88, Issue 4. - P.63-72.

18. Kalybay A. Two-sided estimates of the norm of a class of matrix operators // Siberian Adv. Math. - 2022. - Vol. 32, №1. - P.29-34.

19. Oinarov R., Taspaganbetova Zh. Criteria of boundedness and compactness of a class of matrix operators // Journal of Inequalities and Applications. – 2012. - Vol. 53. - P.1-18.

20. Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A. Criteria on boundedness of a matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications //Ann. Funct. Anal. – 2011. - Vol. 2, №1. - P.114-127.

21. Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A. Boundedness and compactness of a certain class of matrix operators // Math. Journal. – 2011. - Vol. 11, № 2(40). - P.73-85.

22. Martin-Reyes F.J, Sawyer E. Weighted inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals of order one and greater // Proc. Amer. Math. Soc. – 1989. - Vol. 106, № 3. - P.727-733.

23. Степанов В.Д. О весовом неравенстве типа Харди для производных высших порядков и их приложения // ДАН СССР. - 1988. - Т. 302, №5. - С. 1059-1062.

24. Степанов В.Д. Двухвесовые оценки интегралов Римана-Лиувилля // Препринт. ВЦ ДВНЦ АН СССР, Владивосток. – 1988. - 33с.

25. Степанов В.Д. Двухвесовые оценки интегралов Римана-Лиувилля // Препринт. ВЦ ДВНЦ АН СССР, Владивосток. – 1988. - 27с.

26. Степанов В.Д. Об одном весовом неравенстве типа Харди для производных высших порядков // Тр. МИАН СССР. – 1989. - Т. 187. С. 178-190

27. Ойнаров Р. Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов// Труды мат. института им.В. Стеклова. -1993. -Т. 204. - С.240-250.

28. Bloom S., Kerman P. Weighted norm inequalities for operators of Hardy type // Proc.Amer. Matg. Soc. – 1991. - Vol. 113, № 1. - P.135-141.

29. Edmunds D.E., Stepanov V.D. On the singular numbers of certain Volterra

integral operators //J. Func. Anal. - 1995. - Vol. 134, № 1. - P.222-246.

30. Stepanov V.D. Weighted norm inequalities for integral operators and related topics // Nonlinear analysis, function spaces and applications: Proc. of the spring school held in Prague, May 23-28 1994. Prague. - 1994. - Vol. 5. - P.139-175.

31. Stepanov V.D. On the lower bounds for Schatten-von Neumann norms of certain Volterra integral operators //J. LondonMath. Soc. - 2000. - Vol. 61, №2. - P.905-922.

32. Степанов В.Д., Ушакова Е.П. Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Тр. Мат. ин-та им. В.А Стеклова РАН. -2001. Т. 232. - С. 298–317.

33. Ойнаров Р. Ограниченность и компактность интегральных операторов вольтеровского типа // Сиб. Мат. Журнал. - 2007. - Т. 48, №5. - С.1100-1115.

34. Heinig H.P., Sinnamon G. Mapping properties of integral averaging operators // Studia Math. -1989. - Vol. 129. - P.157-177.

35. Stepanov V.D., Ushakova E.P. Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications // Math. Ineq. Appl. - 2010. - Vol. 13, № 3. - P. 449-510.

36. Chen T., Sinnamon G. Generalized Hardy operators and normalizing measures // J. Ineq. Appl. - 2002. - Vol. 7, №6. - P. 829-866.

37. Gogatishvili A, Lang J. The generalized Hardy operators with kernel and variable integral limits in Banach functions spaces // J. Ineq. Appl. 1999. Vol. 4. - P.1-16.

38. Ойнаров Р. Ограниченность и компактность интегральных операторов с переменными пределами интегрирования в весовых пространствах Лебега // Сиб. мат. журнал. – 2011. - Т.52, №6. - С. 1313-1328.

39. Альхалил А., Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования I // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. - 2010. - №4. - С. 55-68.

40. Альхалил А. Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования II // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. -2011. - №1. - С. 5-13.

41. Альхалил А. Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования III // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. - 2011. - №2. - С. 44-50.

42. Temirkhanova A.M., Beszhanova A.T. Boundedness and compactness of a certain class of Matrix operators with variable limits of summation // Eurasian

Math. J. - 2020. - Vol. 11, - P. 66-75.

43. Temirkhanova A.M., Beszhanova A.T. Criteria for the boundedness of a certain class of matrix operators from l_{pv} into l_{qu} // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. - 2023. - No.3(111). - P. 122-137.

44. Темирханова А.М., Бесжанова А.Т. Весовая оценка оператора типа Гильберта Стилтьеса при $1 < q < p < \infty$ // Вестник Казахского Национального Педагогического Универститета имени Абая. - 2022. - №4(80). - С. 7-16.

45. Бесжанова А.Т, Байарыстан А.О. Жоғарғы шегі айнымалы болатын матрицалық оператордың монотонды тізбектер конусындағы салмақты бағалауы // Қазақстан-британ техникалық университетінің хабаршысы, - 2024. - №4(71). - С. 136-145.

46. Темирханова А.М., Бесжанова А.Т. On a discrete Hilbert-Stieltjes inequality // Kazakh mathematical journal, 2021. - Vol. 21, № 1, С. 15-24.

47. Oinarov R., Persson L-E., Temirkhanova A. Weighted inequalitiesfor a class of matrix operators: the case $p \leq q$ // Math. Inequal. Appl. – 2009. - Vol. 12, № 4. - P. 891-903.

48. Hardy G.H. Notes on theorem of Hilbert // Math. Z. – 1920. - Vol. 6. - P. 314-317.

49. Темирханова А.М. Весовое неравенство для одного класса матричных операторов при $1 < q < p < \infty$ // Евразийский математический журнал. – 2008. - №2. – С. 117-127.

50. Lorentz G.G. On the theory of spaces Λ. // PacificJ. Math. - 1951. - №1. P. 411-429.

51. Asekritova I.U., Krugljak N. Ya., Maligranda L, Persson L.-E. Distribution and rearrangement estimates of the maximal function and interpolation // StudiaMath. - 1997. - Vol. 124, № 2. - P. 107-132.

52. Bennett C., Rudnick K. On Lorentz-Zygmund spaces: Dissertationes Math. (RozprawyMat.). – 1980. - Vol.175. - 67p.

53. Ariño M., Muckenhoupt B. Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy’s inequality with weights for non-increasing functions // Trans. Amer. Math. Soc. - 1990. - Vol. 320, №2. - P. 727-735.

54. Sawyer E., Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces // Studia Math. - 1990. - №96, Issue 2. - P. 145-158.

55. Stepanov V.D. The weighted Hardy’s inequality for non-increasing functions // Trans. Amer. Math. Soc. - 1993. - Vol. 338, №1. - P.173-186.

56. Bennett G., Grosse-Erdman K.-G. Weighted Hardy inequalities for decreasing

sequences and functions // Math. Ann. - 2006. - Vol. 334, №3. - P.489-531.

57. Carro M.J., Soria J. Boundedness of some integral operators // Canad. J. Math. - 1993. - Vol. 45, №6. - P. 1155-1166.

58. Ойнаров Р., Шалгынбаева С.Х. Весовые неравенства Харди на конусе монотонных последовательностей // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. - 1998. -№1. - С. 33-42.

59. Goldman M. L. Hardy type inequalities on the cone of quasimonotone functions: Res. Rep. 98/31. Khabarovsk: Russ, Acad. Sci. Far-East Branch Comput. Center. - 1998. - P. 1-69.

60. Goldman M.L. Order-sharp estimates for Hardy-type operators on the cones of quasimonotone functions // Eurasian Math. J. – 2011. - Vol. 2, № 3. - P. 143-146.

61. Шалгынбаева С.Х. Весовые оценки для класса матриц на конусе монотонных последовательностей // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. - 1998. - №5. - С. 76-80.

62. Шалгынбаева С.Х. Весовые неравенства для монотонных последовательностей: дисс. канд. физ.-мат. наук. Астана. - 1991. - 90с.

63. Taspaganbetova Zh. Weighted Hardy type inequalities on the cone of monotone sequences // Mathematical Journal. -2012. - Vol. 12, № 4(46). - P.115-125.

64. Taspaganbetova Zh. Weighted estimate for a class of matrices on the cone of monotone sequences // Eurasian Math. J. – 2012. - Vol. 3, № 46. - P.137-146.

65. Taspaganbetova Zh. Two-sided estimates for matrix operators on the cone of monotone sequences //J. Math. Anal. Appl. – 2014, - Vol. 410. - P. 82-93.

66. Kokilashvili V., Meskhi A., Persson L.-E. Weighted norm inequalities for integral transforms with product kernels // New-York: Mathematics Research Development Series. - 2010. – 342 p.

67. Carro M.J., Soria J. Weighted Lorentz spaces and the Hardy operator //J. Funct. Anal. - 1993. - Vol. 112, №2. - P. 480-494.

68. Heinig H.P., Maligranda L. Weighted inequalities for monotone and concave functions // Studia Math. - 1995. - Vol. 116, №2. - P. 133-165.

69. Johanson M., Stepanov V.D., Ushakova E.P. Hardy inequality with three measures on monotone functions // Math. Inequal. Appl. – 2008. - Vol. 11, №3. - P. 393-413.

70. Myasnikov E.A., Persson L.-E., Stepanov V.D. On the best constants in certain integral inequalities for monotone functions //Acta.Sci. Math. (Szeged). - 1994. - Vol. 59, №3-4. - P. 613-624.

71. Stepanov V.D. Integral operators on the cone of monotone functions // J.

London Math. Soc. - 1993. - Vol. 48, №. 3 – P. 465-487.

72. Heinig H.P., Stepanov V.D. Weighted Hardy inequalities for increasing functions // Canad. J. Math. - 1993. - Vol. 93, №. 1. - P. 104-116.

73. Arendarenko L.S., Oinarov R., Persson L.-E. Some new Hardy – type integral inequalities on cones of monotone functions // Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory. - 2013. - P. 77-89.

74. Гогатишвили А., Степанов В.Д. Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенствна конусе монотонных функции // Успехи мат. наук. - 2013. - Т. 68, № 4(412). - С. 3-68.

75. D. V. Prokhorov, V. D. Stepanov, E. P. Ushakova. “Hardy–Steklov Integral Operators: Part I // Sovrem. Probl. Mat. – 2018. – Vol. 300, Issue 2. – P. 1-1127

76. V.D. Stepanov, E.P. Ushakova. On the geometric mean operator with variable limits of integration // Proc. SteklovInst. Math. – 2008. – Vol. 260. - P. 264–288.

77. Батуев Э.Н., Степанов В.Д. О весовых неравенствах типа Харди // Сиб. мат. журн. - 1989. - Т. 30, №1. - С.13-22.

78. S.G. Krein (Ed.). Functional analysis. Wolters-Noordh off Publishing. - 1972. - p.380.

79. Chen Q., Yang B. A survey on the study of Hilbert-type inequalities // Journal of Inequalities and Applications. – 2015. – Vol. 2015, № 302. P. 1-29.

80. Bicheng Y., Debnath L. On a new generalization of Hardy-Hilbert's inequality and its applications // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1999. – Vol. 233. – P. 484-497.

81. Jichang K., Debnath L. On new generalization of Hilbert's inequality and their applications // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2000. – Vol. 245. - P. 248-265.

82. Mingzhe G. On Hilbert's inequality and its applications // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1997. – Vol. 212. - P. 316-323.

83. Gao M. and Yang B. On the extended Hilbert's inequality // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1998. – Vol. 126, №3. - P. 751-759.

84. Jichang K. On new extensions of Hilbert's integral inequality // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1999. - Vol. 235, № 2. - P. 608-614.

85. Yang B. On new generalizations of Hilbert's inequality // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2000. - Vol. 248, №1. - P. 29-40.

86. Handley G.D., Koliha J.J., Pecaric J. A Hilbert type inequality // Tamkang Journal of Mathematics. – 2000. - Vol. 31, № 4. – P. 311-315.

87. Pachpatte B.G. Inequalities similar to certain extensions of Hilbert's inequality // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2000. - Vol. 243, № 2. – P. 217-227.

88. Zhao C.J. Generalization on two new Hilbert type inequalities // Journal of Mathematics. – 2000. - Vol. 20, № 4. – P. 413-416.

89. Zhao C.J., Debnath L. Some new inverse type Hilbert integral inequalities // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001. - Vol. 262, № 1. – P. 411-418.

90. Andersen K.F. Weighted inequalities for the Stieltjes- transformation and Hubert's double series // Proc. Roy.Soc Edinburgh. – 1980. – Vol. 86, № 1-2. P. 75-84.

91. Sinnamon G. A note on the Stieltjes transformation // Proc. Roy. Soc Edinburgh. – 1988. – Vol. 110, Issue 1-2. P. 73-78.

92. Gogatishvili A., Kufner A., Persson L.-E. The weighted Stieltjes inequality and applications // Math.Nachr. – 2013. – Vol. 286, № 7. – P. 659 - 668.

93. Gogatishvili A., Persson L-E., Stepanov V.D. P. Wall Some scales of equivalent conditions to characterize the Stieltjes inequality: the case q < p // Math. Nachr. -2014. – Vol. 287, № 2-3. – P. 242-253.